Apuntes de Cálculo (2)

Juan Carlos Cabello Píñar

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Índice general

Capítulo 1

Cálculo en una variable

Capítulo 2

Cálculo en varias variables

2.1. Técnicas de integración en varias variables

Sumario

En esta lección vamos a introducir la integración en varias variables. Entre otros problemas nos encontramos con el hecho de que no se dispone de ningún procedimiento elemental comparable a la Regla de Barrow. Esta contrariedad se resolverá con una técnica fundamental: Teorema de Fubini, que relaciona la integral en $\mathbb{R}^n$ con integraciones sucesivas en espacios de menor dimensión. Siguiendo este proceso acabaremos finalmente integrando en una de las variables. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

II.9.1 Conjuntos medibles.

II.9.2 Integrabilidad en $\mathbb{R}^q$.

II.9.3 Teorema de Fubini

II.9.4 Cambio de coordenadas.

II.9.5 Relación de ejercicios.

2.1.1. Conjuntos medibles

Dado $q \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto

$$\mathbb{R}^q = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times . \overset{q}{.} . \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, ..., x_q);\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., q\}.$$

A las funciones definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}^q$ se les llamará **campos**. Si toma valores en $\mathbb{R}$ se les llamará **campos escalares** y si los toma en $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ se les denominará **campos vectoriales**.

Nuestra intención es ahora la de integrar campos escalares definidos en un subconjunto de $\mathbb{R}^q$. Comencemos definiendo el concepto intervalo en $\mathbb{R}^q$.

Dado I un subconjunto de $\mathbb{R}^q$, diremos que es un **intervalo** (respectivamante **intervalo acotado**), si existen $I_1, I_2, ..., I_q$ intervalos (respectivamante intervalos acotados) de números reales tales que

$$I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_q.$$

Es claro que si I es un intervalo acotado de $\mathbb{R}^2$, entonces podemos definir su área, $a(I)$, (respectivamente, su volumen, v(I), si $q = 3$), como

$$a(I) = l(I_1)l(I_2) \quad (\text{resp. } v(I) = l(I_1)l(I_2)l(I_3)).$$

donde $l(I_k) = b_k - a_k$, siempre que $I_k = [a_k, b_k]$.

La pregunta natural que nos surge es cómo asociar una longitud, un área ó un volumen a otro tipo de conjuntos que no sean intervalos. Hagámoslo como ejemplo para el caso $n = 2$.

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Podemos considerar todas las familias numerables $F_J = \{I_n^J\}$ y $\{G_K\} = \{I_n^K\}$ de intervalos acotados de $\mathbb{R}^2$, tales que

$$\cup I_n^J \subseteq A \subseteq \cup I_n^K,$$

y hallar

$$Inf\{\sum_{n=1}^{\infty} a(I_n^K); A \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n^K, I_n^K \text{ intervalo acotado de } \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

y

$$Sup\{\sum_{n=1}^{\infty} a(I_n^J); A \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n^J, I_n^J \text{ intervalo acotado de } \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Análogamente se hace para el caso $n = 1$, considerando sus longitudes y para el caso $n = 3$ considerando sus volúmenes.

Así para $q = 1, 2, 3$, diremos que A es un **conjunto medible** si ambos valores coinciden y llamaremos **medida de** A , $\lambda(A)$, a dicho valor. No descartamos que dicho valor pudiera ser infinito.

Dicha medida posee las siguientes propiedades:

1. Si A, B son dos conjuntos medibles y $A \subset B$ entonces $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.

2. Si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de conjuntos numerables, entonces

$$\lambda(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

   Si además los conjuntos son disjuntos dos a dos,

$$\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

3. Si I es un intervalo acotado, entonces $\lambda(I)$ coincide, con la longitud si $q = 1$, el área si $q = 2$, ó, con el volumen si $q = 3$.

En la práctica es muy difícil encontrar un conjunto que **no** sea medible.

2.1.2. Integrabilidad en $\mathbb{R}^q$

En esta sección queremos saber qué tipos de campos escalares se pueden integrar y ¿cómo hallar su integral?

Comencemos ahora con los campos más sencillos y veamos cómo asignarle una integral

Un campo $s : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice **simple** si sólo toma un número finito de valores, esto es, $s(\mathbb{R}^q) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. En este caso, si $\alpha_i \geq 0 \quad \forall i$ y si llamamos $A_i := \{x \in \mathbb{R}^q : s(x) = \alpha_i\}$, se define la **integral** de s por :

$$\int_{\mathbb{R}^n} s d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda(A_i).$$

Sea $f : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Llamamos f^+ (resp. f^-) a un nuevo campo definido, para cada $x \in \mathbb{R}^q$ por

$$f^+(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} f(x) & si & f(x) > 0 \\ 0 & si & f(x) \leq 0 \end{array} \right. ,$$

$$f^-(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} -f(x) & si & f(x) < 0 \\ 0 & si & f(x) \geq 0 \end{array} \right. .$$

Es claro que $f = f^+ - f^-$.

Diremos que f es una **función medible** si sus funciones asociadas, f^+ y f^-, son límite " puntual " de sendas sucesiones crecientes de funciones simples. En la práctica es muy difícil encontrar un campo que **no** sea medible.

Si f es una función medible positiva ($f^- = 0$) y $\{s_n\}$ una sucesión creciente de funciones simples que converge puntualmente a f, definimos la **integral** de la función f por

$$\int_{\mathbb{R}^q} f \; d\lambda := \lim_n \int_{\mathbb{R}^q} s_n \; d\lambda$$

Se puede comprobar que dicha definición no depende de la sucesión $\{s_k\}$ elegida.

Dado E un conjunto medible de $\mathbb{R}^q$ y una función $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos considerar la función f^E, esto es, la extensión de f a todo $\mathbb{R}^q$, que se anula fuera de E.

Se dice que f es **integrable en** E, si f^E es medible y

$$\int_{\mathbb{R}^q} |f^E| \; d\lambda < \infty\}.$$

En tal caso se define la **integral de** f **en** E por

$$\int_E f \; d\lambda := \int_{\mathbb{R}^q} (f^E)^+ d\lambda - \int_{\mathbb{R}^q} (f^E)^- \; d\lambda.$$

Notaremos por $L(E)$ al espacio formado por todas las funciones que son integrables en E. Comentemos ahora algunas de sus propiedades más interesantes:

1) $L(E)$ es un espacio vectorial y

$$\int_E (rf + g) \; d\lambda = r \int_E f \; d\lambda + \int_E g \; d\lambda, \quad (r \in \mathbb{R}, f, g \in L(E)).$$

2) Si f y g son medibles e iguales salvo en un conjunto de medida cero, entonces f es integrable en E si, y sólo si, lo es g, y en tal caso

$$\int_E f \; d\lambda = \int_E g \; d\lambda.$$

3) Sean E, A y B tres conjuntos medibles tales que $E = A \cup B$ y $\lambda(A \cap B) = 0$. Entonces f es integrable en E si, y sólo si, f es integrable en A y B. Además, en caso afirmativo

$$\int_E f \; d\lambda = \int_A f \; d\lambda + \int_B f \; d\lambda.$$

4) Si E es un conjunto medible, entonces

$$\lambda(E) = \int_E 1 \; d\lambda.$$

2.1.3. Teorema de Fubini

Como era de esperar, la definición de integral no es útil para el cálculo de dicha integral. Recuérdese que este problema, en el caso de intervalos de números reales, se resolvió en $\mathbb{R}$ usando la regla de Barrow, pero esta herramienta no está disponible ni en $\mathbb{R}^2$ ni en $\mathbb{R}^3$. Nuestro siguiente resultado trata de resolver esta dificultad, relacionando la integral múltiple con sucesivas integrales en $\mathbb{R}$. Para ello, consideremos las siguientes observaciones:

Si $E \subseteq \mathbb{R}^2$, notaremos, para cada $x \in \mathbb{R}$, por

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R} : \ (x, y) \in E\}.$$

Análogamente, notaremos, para cada $y \in \mathbb{R}$, por

$$E(y) = \{x \in \mathbb{R} : \ (x, y) \in E\}.$$

Es fácil probar que si E es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^2$, entonces $E(x)$ y $E(y)$ son subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$.

Ya podemos enunciar el teorema de Fubini adaptado a cada caso.

Teorema 2.1.1. *(de Fubini para $E \subseteq \mathbb{R}^2$)*

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^2$ medible y sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, entonces

$$\int_E f(x,y)d(x,y) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} [\int_{E(x)} f(x,y)dy]dx = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} [\int_{E(y)} f(x,y)dx]dy,$$

siendo $\alpha_1 = Inf\ E_1,\ \beta_1 = Sup\ E_1,\ \alpha_2 = Inf\ E_2,\ \beta_2 = Sup\ E_2$, donde

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R};\ E(x) \neq \emptyset\}$$

y

$$E_2 = \{y \in \mathbb{R};\ E(y) \neq \emptyset\}$$

En particular, cuando $E = I \times J$, siendo I, J intervalos de $\mathbb{R}$, entonces

$$\int_E f(x,y) = \int_I [\int_J f(x,y)dy]dx = \int_J [\int_I f(x,y)dx]dy.$$

Ejemplo: Calcúlese el área del círculo de radio r.

Teorema 2.1.2. *(de Fubini para $E \subseteq \mathbb{R}^3$)*

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^3$ medible y sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, entonces

$$\int_E f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_{\alpha_3}^{\beta_3} [\int_{E(z)} f(x,y)d(x,y)]dz,$$

siendo $\alpha_3 = Inf\ E_3$, $\beta_3 = Sup\ E_3$, donde

$$E_3 = \{z \in \mathbb{R};\ E(z) \neq \emptyset\}$$

y

$$E[z] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x,y,z) \in E\}.$$

En particular, cuando $E = I \times J \times K$, siendo I, J, K intervalos de $\mathbb{R}$, entonces

$$\int_E f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_I [\int_J (\int_K f(x,y,z)dz)dy]dx.$$

Análogamente se podría hacer, para ($E[x]$ y $E[y]$) o en el caso del intervalo, cambiando el orden de integración de los intervalos.

Veamos una sencilla aplicación: Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R};\ E[x] \neq \emptyset\} = [a,b].$$

Según hemos visto ya, su volumen, $\lambda(E)$, viene dado por

$$\lambda(E) = \int_E 1\ d(x,y,z),$$

por lo que, aplicando el teorema de Fubini y la definición de área de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\lambda(E) = \int_a^b (\int_{E[x]} 1\ d(y,z))dx) = \int_a^b \lambda(E[x]))dx.$$

Dicha igualdad es conocida como el **principio de Cavalieri**.

Obsérvese que si E es el sólido de revolución generado por la gráfica de una cierta $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, aplicando el principio de Cavalieri, obtenemos que

$$V(E) = \pi \int_a^b f^2(x)dx,$$

como ya habíamos comentado anteriormente.

Ejercicio: Calcúlese el volumen de la esfera de radio r.

2.1.4. Cambio de coordenadas

Es posible que convenga cambiar la función inicial por otra función. Este cambio será arbitrado por el teorema del cambio de variable que suele usarse en alguna de las siguientes formas concretas:

Coordenadas polares, $E \subseteq \mathbb{R}^2$

Tomamos $U = \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[$, $V = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0);\ x \leq 0\}$, y la aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho, \theta) = (\rho cos\theta, \rho sen\theta).$$

En este caso

$$\int_E f(x,y)d(x,y) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho cos\theta, \rho sen\theta)\rho d(\rho, \theta).$$

Ejercicio: Sea $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Calcúlese $\int_E 1d(x,y)$.

Coordenadas cilíndricas, $E \subseteq \mathbb{R}^3$

Tomamos $U = \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[\times \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x,0,z);\ x \leq 0\}$, y la aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho, \theta, z) = (\rho cos\theta, \rho sen\theta, z).$$

En este caso

$$\int_E f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho cos\theta, \rho sen\theta, z)\rho d(\rho, \theta, z).$$

Ejercicio: Sea $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq r^2;\ 0 \leq z \leq h\}$, con $r, h > 0$. Calcúlese $\int_E 1d(x,y,z)$.

Coordenadas esféricas, $E \subseteq \mathbb{R}^3$

Tomamos $U = \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[\times]-\pi/2, \pi/2[$, $V = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x,0,z);\ x \leq 0\}$, y la aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho, \theta, \varphi) = (\rho cos\theta cos\varphi, \rho sen\theta cos\varphi, \rho sen\varphi).$$

En este caso

$$\int_E f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho cos\theta cos\varphi, \rho sen\theta cos\varphi, sen\varphi)\rho^2 cos\varphi d(\rho, \theta, \varphi).$$

Ejercicio: Sea $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$, con $r > 0$. Calcúlese $\int_E 1d(x,y,z)$.

2.1.5. Relación de ejercicios

1. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_I \operatorname{sen}^2 x \ \operatorname{sen}^2 y \ d(x,y), \ I = [0,\pi] \times [0,\pi].$

   b) $\displaystyle\int_I \frac{x^2}{1+y^2} \ d(x,y), \ I = [0,1] \times [0,1].$

   c) $\displaystyle\int_I y \ \ln x \ d(x,y), \ I = [1,e] \times [1,e].$

   d) $\displaystyle\int_I x^3 \ y^3 \ d(x,y), \ I = [0,1] \times [0,1].$

   e) $\displaystyle\int_I \frac{1}{(1+x+y)^2} \ d(x,y), \ I = [0,1] \times [0,1].$

   f) $\displaystyle\int_I \frac{1}{(1+x+y+z)^3} \ d(x,y,z), \ I = [0,1] \times [0,1] \times [0,1].$

   g) $\displaystyle\int_I x \ log(xy) \ d(x,y), \ I = [2,3] \times [1,2].$

   h) $\displaystyle\int_I y \ \cos(xy) \ d(x,y), \ I = [0,1] \times [1,2].$

2. Sea $f : A \to \mathbb{R}$, calcúlese su integral en los siguientes casos:

   a) $f(x,y) = 1$ siendo A la región limitada por $y^2 = x^3, \quad y = x.$
   b) $f(x,y) = x^2$ siendo A la región limitada por $xy = 16, y = x, y = 0, x = 8.$
   c) $f(x,y) = x$ siendo A el triángulo de vértices $(0,0), (1,1), (0,1).$
   d) $f(x,y) = x$ siendo A la región limitada por la recta que pasa por $(0,2)$ y $(2,0)$ y la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 1.
   e) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$ siendo A la región limitada por $y^2 = x, x = 0, y = 1.$
   f) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ siendo A la región limitada por $y = \frac{x^2}{2}, y = x.$
   g) $f(x,y) = xy^2$ siendo A la región limitada por $y^2 = 2x, x = 1.$
   h) $f(x,y) = xy$ siendo A la región limitada por la semicircunferencia superior $(x-2)^2 + y^2 = 1$ y el eje OX.
   i) $f(x,y) = 4 - y^2$ siendo A la región limitada por $y^2 = 2x$ y $y^2 = 8 - 2x$
   j) $f(x,y) = e^{x^2}$ siendo el conjunto A el triángulo formado por las rectas $2y = x$, $x = 2$ y el eje x

3. Calcúlese $\int_A f$ en cada uno de los casos siguientes:

   a) $f(x,y) = 1 - x - y, \ A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1]; \ x + y \leq 1\}$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1];\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

c) $f(x,y) = x + y,\ A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1];\ x^2 \leq y \leq 2x^2\}$

d) $f(x,y) = x^2\ y^2,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$

e) $f(x,y) = y^2,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$

f) $f(x,y) = 1,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1,\ x^2 \leq y\}$

g) $f(x,y) = 1,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 2x\}$

h) $f(x,y) = 1,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$

i) $f(x,y) = 1,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$

j) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2),\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq \pi/2\}$

k) $f(x,y) = \dfrac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2},\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$

l) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2},\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$

m) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}},\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

n) $f(x,y) = x\ y,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$

ñ) $f(x,y) = x^2\ y,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$

o) $f(x,y) = x,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$

p) $f(x,y) = x,\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 2x\}$

q) $f(x,y) = x\sqrt{1 - x^2 - y^2},\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x, y \geq 0\}$

r) $f(x,y) = \exp(\frac{x}{y}),\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y^3 \leq x \leq y^2,\quad x \geq 0, y \geq 0\}$

s) $f(x,y) = \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right),\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x, y \geq 0,\ x + y \leq 2\}$

t) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}},\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \leq y,\ x + y \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

u) $f(x,y) = x^2 + y^2,\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x^2 + y^2)^2 \leq 4(x^2 - y^2),\ x \geq 0\}$

v) $f(x,y) = x^2 + y^2,\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 2y,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$

4. Calcular el volumen de la región A definida por:

a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2,\quad x^2 + y^2 - ry \leq 0\}$.

b) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \geq 1,\quad x^2 + y^2 \leq 2,\quad z(x^2 + y^2) \leq 1,\quad z \geq 0\}$.

c) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z^2 \leq x^2 + y^2 \leq z\}$.

d) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)\}$.

5. Calcular las siguientes integrales triples:

a) $\displaystyle\int_A z\ e^{-(x^2+y^2)}\ d(x,y,z)$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2(x^2+y^2) \leq z^2,\ z \geq 0,\ z \leq 1\}$.

b) $\displaystyle\int_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ d(x,y,z)$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 4\}$.

c) $\displaystyle\int_A (x+y-2z)\ d(x,y,z)$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; z^2\geq x^2+y^2,\ z\geq 0,\ z\leq 3\}$.

d) $\displaystyle\int_A \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^n\ d(x,y,z)$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2\leq a^2\}$ $(n\in\mathbb{N},\ a\in\mathbb{R}^+)$.

e) $f(x,y,z)=(x+y+z)^2$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leq 1, x^2+y^2+z^2\leq 2z\}$

f) $f(x,y,z)=z$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\leq 1, z\geq 0\}$

g) $f(x,y,z)=z$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\leq z^2, 0\leq z\leq 1\}$

h) $f(x,y,z)=x^2$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x\geq 0,\ x^2+y^2+(z-1)^2\leq 1,\ 4z^2\geq 3(x^2+y^2)\}$

i) $f(x,y,z)=zy\sqrt{x^2+y^2}$ $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\leq z\leq x^2+y^2,\ 0\leq y\leq \sqrt{2x-x^2}\}$

j) $f(x,y,z)=z$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leq 2,\ x^2+y^2\leq z\}$

k) $f(x,y,z)=z^2$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leq \mathrm{R}^2,\ x^2+y^2+z^2\leq 2\mathrm{R}z\}$

l) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 3\}$

2.2. El plano y el espacio euclídeos

Sumario

En esta lección nos centramos en el estudio de la estructura euclídea de $\mathbb{R}^n$ que es indispensable para extender los conceptos de continuidad, derivación e integración, ya conocidos para funciones reales de variable real, a las funciones con valores en $\mathbb{R}^n$ y definidas en un subconjunto de A de $\mathbb{R}^q$. En realidad nuestro estudio se podría ceñir a los casos en que $n, q \in \{1, 2, 3\}$ que son en los que trabajaremos siempre, sin embargo, la estructura euclídea puede definirse sin dificultad para cualquier n. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

II.2.1 Estructura algebraica.

II.2.2 Conceptos topológicos.

II.2.3 Funciones coordenadas.

II.2.4 Relación de Ejercicios.

2.2.1. Estructura algebraica

Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos en el conjunto

$$\mathbb{R}^q = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \overset{q}{\ldots} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, ..., x_q);\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., q\},$$

la siguiente operación **Suma**:

Dados $x = (x_1, x_2, ..., x_q)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_q)$, definimos

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_q + y_q)$$

Es claro que esta operación hereda las propiedades de la suma de números reales:

1. Propiedad asociativa:
$$(x + y) + z = x + (y + z).$$
2. Propiedad conmutativa:
$$x + y = y + x.$$
3. Propiedad de existencia de elemento neutro:

Existe una q-upla, $0 = (0, 0, ..., 0)$ tal que para cada q-upla $x = (x_1, x_2, ..., x_q)$, se tiene que

$$x + 0 = x.$$

4. Propiedad de existencia de elemento simétrico:

Para cada q-upla $x = (x_1, x_2, ..., x_q)$, la q-upla $-x = (-x_1, -x_2, ..., -x_q)$, verifica que

$$x + (-x) = 0.$$

En el caso $q > 2$ **no tenemos un verdadero producto**, sin embargo, vamos a definir dos "seudo-productos"que en muchos casos serán suficientes para poder trabajar.

En el primer caso, **producto por un escalar**, asociamos a cada pareja formada por un escalar t y una q-upla $x = (x_1, x_2, ..., x_nq)$ un nueva q-upla definida por

$$t(x_1, x_2, ..., x_q) = (tx_1, tx_2, ..., tx_q).$$

Este seudo-producto hereda algunas propiedades:

1) $1x = x$

2) $t[sx] = tsx \ (t, s \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^q)$

3) $(s + t)x = sx + tx \ (t, s \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^q)$

4) $s(x + y) = sx + sy \ (s \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathbb{R}^q)$

Este hecho se expresa diciendo que $\mathbb{R}^q$ dotado con las operaciones **suma** y **producto por un escalar** arriba definidas tiene estructura de **espacio vectorial**. A partir de aquí podemos llamar **vectores** a las q-uplas.

2.2.2. Estructura topológica

El segundo seudo-producto asocia a cada par de n-uplas un escalar.

Sea $q \in \mathbb{N}$. Dados $x = (x_1, x_2, ..., x_q)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_q)$ dos vectores de $\mathbb{R}^q$, llamamos **producto escalar** de ambos, $< x, y >$, al número real definido por

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{q} x_i y_i.$$

Entre las consecuencias más notorias de la existencia de un producto escalar podemos subrayar la existencia de una función, que en $\mathbb{R}$ coincide con la función valor absoluto, y que asocia a cada vector un número real no negativo. Concretamente, dado $x = (x_1, x_2, ..., x_q) \in \mathbb{R}^q$ definimos su **norma**, $\|x\|$, mediante la siguiente ley:

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{q} x_i^2}.$$

Es fácil probar que la aplicación definida por $x \longmapsto \|x\|$ hace el mismo papel que la función valor absoluto en $\mathbb{R}$, tal como muestra el siguiente resultado:

Proposición 2.2.1.

1. $\|rx\| = |r|\|x\| \quad (r \in \mathbb{R})$.
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. *(Desigualdad triangular)*
3. $\|x\| = 0$, *si y sólo si* $x = 0$.

La importancia de la existencia de esta función-norma estriba en el hecho de que ésta nos capacita para definir una " distancia " entre dos vectores, y por tanto, para determinar la proximidad o lejanía de dos vectores de $\mathbb{R}^q$. Concretamente, para cada dos vectores

$$x = (x_1, x_2, ..., x_q),\ y = (y_1, y_2, ..., y_q) \in \mathbb{R}^q,$$

definimos la distancia entre ellos, por

$$dist(x, y) = \|y - x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{q} (y_i - x_i)^2}.$$

A su vez ésta nos permite considerar :

1. Conjuntos de $\mathbb{R}^q$ que hacen el mismo papel que los intervalos de $\mathbb{R}$:

   a) **Bola abierta de centro** $a \in \mathbb{R}^q$ **y radio** $r \in \mathbb{R}^+$

   $$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^q;\ \|x - a\| < r\}.$$

   b) **Bola cerrada de centro** $a \in \mathbb{R}^q$ **y radio** $r \in \mathbb{R}^+$

   $$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^q;\ \|x - a\| \leq r\}.$$

2. Conjuntos que juegan el papel de los extremos del intervalo:

   Esfera de centro $a \in \mathbb{R}^q$ **y radio** $r \in \mathbb{R}^+$

   $$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^q;\ \|x - a\| = r\}.$$

3. Conjunto acotado

   Sea A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$. Se dice que A es un **conjunto acotado** si existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

   $$A \subseteq B(0, M).$$

   Ejemplo: Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in]0, 1[,\ y \in [0, 2]\}$.

   Es claro que el conjunto A es acotado en $\mathbb{R}^2$, mientras que el eje x no lo es.

4. Punto de acumulación

   Se dice que $x_0 \in \mathbb{R}^q$ es un **punto de acumulación** de A, $x_0 \in A'$, si todo bola " punteada " centrada en x_0 intersecta al conjunto A, esto es

   $$B(x_0, \varepsilon)\backslash\{x_0\} \bigcap A \neq 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

   Notaremos por A' al conjunto de puntos de acumulación .

   Ejemplo: Si consideramos el mismo conjunto A, considerado anteriormente, tendremos que $(0, 1) \in A'$.

5. Punto interior

   Se dice que $y \in A$ es un **punto interior** de A, si existe $r > 0$ tal que $B(y, r) \subseteq A$.

   Notaremos por A° al conjunto de puntos interiores de A.

   Ejemplo: Considerando el mismo conjunto anterior, se tiene que $(1/2, 1) \in A^\circ$.

6. Conjunto abierto

   Diremos que un conjunto A es **abierto** si $A = A^\circ$.

   Ejemplo: El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in]0,1[,\ y \in]0,2[\}$ es abierto, mientras que el conjunto A, que usamos en todos los ejemplos, no lo es.

7. Conjunto cerrado

   Diremos que un conjunto A es **cerrado** si $A' \subseteq A$. Es fácil probar que A es cerrado si, y sólo si, su complementario es abierto.

   Al conjunto $\overline{A \bigcup A'} \backslash A^\circ$ se le denomina **frontera** de A y suele notarse por $Fr(A)$ o por $\delta(A)$.

   Ejemplo: El conjunto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0,1],\ y \in [0,2]\}$ es cerrado, mientras que el conjunto B anterior no lo es. Es claro que

$$Fr(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0, y \in [0,2]\} \bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 1, y \in [0,2]\}$$

$$\bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0,1], y = 0\} \bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0,1], y = 2\}.$$

8. Conjunto compacto

   Diremos que un conjunto A es **compacto** si A es cerrado y acotado.

   Ejemplo: El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0,1],\ y \in [0,2]\}$ es compacto, mientras que el conjunto A no lo es.

2.2.3. Funciones coordenadas

Recordemos que a las funciones definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}^q$ se les llama campos. Si toman valores en $\mathbb{R}$ se les llama **campos escalares** y si los toman en $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$, se les denomina **campos vectoriales**.

Veamos algunos ejemplos:

1. Proyecciones

   Sea $q \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., q\}$ se puede considerar la aplicación

   $$p_i : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R},$$

   definida por

   $$p_i : (x_1, x_2, ..., x_q) \longmapsto x_i.$$

   Dicha aplicación recibe el nombre de **proyección i-ésima**. Cada función proyección es un campo escalar.

2. Inyecciones.

   Podemos considerar ahora la aplicación

   $$I_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q,$$

   definida por

   $$I_i : r \longmapsto (0, 0, ...,^{i)} r, 0, ..., 0).$$

   Dicha aplicación recibe el nombre de **inyección i-ésima** y es un ejemplo sencillo de campo vectorial.

3. La función norma

   Podemos considerar el campo escalar

   $$\|.\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

   definida por

   $$x \longmapsto \|x\|.$$

Vistas las propiedades de $\mathbb{R}^n$, es fácil comprender que dadas dos campos vectoriales su **suma** es un nuevo campo vectorial y que el **producto** de un campo **escalar** por un campo **vectorial** también es un campo vectorial. Sin embargo, es claro que **no** tiene sentido hablar del producto de dos campos vectoriales.

Nuestro objetivo ahora es asociar a todo campo vectorial con valores en $\mathbb{R}^n$ n campos escalares.

Sea A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial. Dado $i \in \{1, 2, ..., n\}$, el campo escalar

$$f_i = p_i \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R},$$

donde p_i es la correspondiente proyección $i-$ésima, recibe el nombre de **función coordenada i-ésima**.

Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ se puede comprobar fácilmente que

$$f = \sum_{i=1}^{n} I_i \circ f_i,$$

donde por I_i queremos indicar la correspondiente función inyección i-ésima.

2.2.4. Relación de ejercicios

1. Descríbanse el interior, la acumulación y la frontera de los siguientes Conjuntos:

   a) a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Q}$. c)$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. d) $[0,1] \cup \{2\}$. e) $\{1/n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

   b) $A = \{(x_n, y_n);\ x_n = \frac{20}{n}, y_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

   c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = rx\}$. $(r \in \mathbb{R})$

   d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ $(0 < a < b \in \mathbb{R}$.

   e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ $(0 < a < b < c \in \mathbb{R}$.

   f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$ $(0 < a < b \in \mathbb{R}$.

2. Díganse cuáles de los conjuntos del ejercicio anterior son compactos.

2.3. Campos: Continuidad y Derivadas parciales

Sumario

En esta lección introduciremosmos el concepto de continuidad y derivada parcial. Daremos algunos ejemplos importantes y definiremos el plano tangente a un campo escalar. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

2.3.1. Continuidad.

Sea A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^n$ y sea $a \in A$. Se dice que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^q$ es un **campo continuo en** a si verifica la siguiente propiedad:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que si } x \in A, \|x - a\| \leq \delta \text{ entonces } \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Se dice que f es continua en $B \subseteq A$, si f es continua en todos los puntos de B.

Ejemplos

La función identidad en $\mathbb{R}^n$, todos los campos constantes, las proyecciones, las inyecciones y la función norma son campos continuos.

En orden a construir nuevos campos continuos veamos que las operaciones usuales están bien avenidas con la continuidad.

Proposición 2.3.1. *Sean A un subconjunto de $\mathbb{R},^q$, $a \in A$ y $F, G : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos campos continuos en a. Entonces $F+G$ es un nuevo campo continuo en a. Si $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo, entonces $F.g$ también es un campo continuo en a y si además, para cada $x \in A$, $g(x) \neq 0$, entonces $F,1/g$ es también continuo en a.*

Proposición 2.3.2. *(Regla de la cadena)*
Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}^q$, $a \in A$ y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua en a. Sean ahora $B \supseteq F(A)$ y $G : B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un campo continuo en $F(a)$. Entonces $G \circ F$ es un campo continuo en a.

Podemos vincular la continuidad de un campo vectorial a la continuidad de sus funciones coordenadas:

Proposición 2.3.3. *(***Regla de oro***)*
Sean A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$, a un punto de A y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces
F es continuo en a si, y solo si F_i es continuo en a $\forall i$.

2.3.2. Derivadas parciales

Recuérdese que si A un subconjunto no vacío de números reales, $a \in A \bigcap A'$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, entonces se dice que f es derivable en a si

$$lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'(a).$$

Tratemos ahora de dar sentido a la expresión anterior en el caso en que $A \subseteq \mathbb{R}^q$, $a \in A$ y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sea un campo vectorial.

Obsérvese en primer lugar que la aproximación al punto a de $\mathbb{R}^q$ puede hacerse por muy diferentes direcciones.

Sea, para cada $i \in \{1, 2, ..., q\}$, $e_i = (0, 0, ..., 1, 0, ..., 0)$, esto es, el vector de $\mathbb{R}^q$ cuya única coordenada no nula es la i-ésima cuyo valor es uno. Supongamos que existe $\delta > 0$, tal que $a + re_i \subseteq A$, con $r \in]-\delta, \delta[$. Se dice que F tiene o admite **derivada parcial respecto de la variable i-ésima en el punto** a si existe

$$lim_{t \to 0} \frac{F(a + te_i) - F(a)}{t}.$$

Dicho límite se denomina **derivada parcial i-ésima de** F en el punto a y se nota por $\frac{\partial F}{\partial x_i}(a)$.

Notas

1. Si f es un campo escalar , entonces el cálculo de la derivada parcial i-ésima de f en un punto genérico $x = (x_1, x_2, ..., x_q)$ se ha de llevar a cabo **derivando la función real que resulta de considerar constantes las variables** x_j $(j \neq i)$.

2. Si $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial tal que $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ se suele notar por $F'(a)$ y recibe el nombre de **derivada elemental** de F en a.

Damos a continuación sendas interpretaciones geométrica y física de las derivadas parciales de un campo escalar.

Interpretación geométrica

Consideremos la gráfica del campo escalar anterior , esto es

$$Graf(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = f(x, y),\ (x, y) \in A\}.$$

El plano $y = b$, corta a la gráfica, dando lugar a un conjunto C_1,

$$C_1 := \{(x, b, f(x, b)) \in \mathbb{R}^3 : (x, b) \in A\}.$$

Obsérvese que el conjunto C_1 es la gráfica de la función $g : x \longmapsto f(x, b)$, de manera que la pendiente de su recta tangente es $g'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$.

Análogamente podría entenderse para la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

Interpretación propiamente física

Las derivadas parciales pueden interpretarse como razones de cambio: Consideremos la función T que determina la temperatura en cualquier punto de la corteza terrestre. Claramente ésta depende, en cada punto (x, y), de la longitud x y de la latitud y de dicho punto. La derivada parcial $\frac{\partial T}{\partial x}(a, b)$ es la razón a la que la temperatura cambia en la dirección este-oeste, mientras que $\frac{\partial T}{\partial y}(a, b)$ es la razón a la que la temperatura cambia en la dirección norte-sur.

También podemos relacionar la existencia de parciales de un campo vectorial y de sus funciones coordenadas:

Proposición 2.3.4. *(***Regla de oro***)*
Sean A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$, a un punto de A y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces F admite todas sus derivadas parciales en a si, y solo si F_i admite todas sus derivadas parciales en a $\forall i$. Además en caso afirmativo:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}(a)\right)_i = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a). \quad i = 1, 2, ..., n, \quad j = 1, 2, ..., q.$$

En particular si $q = 1$, entonces $F'(a) = (F_1'(a), F_2'(a), ..., F_n'(a))$.

Ejercicio: Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x + y, x^2, xy)$. Estúdiese la continuidad y calcúlese $\frac{\partial F}{\partial x}(1, 2)$.

Sea $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^q$ es un campo vectorial, entonces se dice que F **es de clase** $\mathcal{C}^1(A)$ si admite todas sus derivadas parciales en A y éstas son continuas en A. El campo vectorial F definido anteriormente es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.

2.3.3. Plano tangente

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ un campo escalar que admite todas sus parciales en un punto $(a, b) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$. Tal como hicimos con la derivada de una función real de variable real, tratemos ahora de encontrar, en cada punto (a, b) , un plano que sea lo más parecido posible a la gráfica del campo escalar en el punto (a, b).

Tengamos en cuenta para ello que

1. Sea $z = mx + ny + c$ un plano en $\mathbb{R}^3$. Si queremos que el punto $((a, b), f(a, b))$ pertenezca dicho plano, $c = f(a, b) - ma - nb$ y por tanto, el plano debe tener la forma:
$$z = m(x - a) + n(y - a) + f(a, b).$$
2. La condición de mejor aproximación de una recta, r que pasa por el punto $(a, f(a))$, esto es, $r \equiv y = m(x - a) + f(a)$, se aproxime a la curva $y = f(x)$ en dicho punto, no es otra, como ya vimos anteriomente, que el hecho de asegurar
$$lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - m(x - a)}{x - a} = 0.$$
A posteriori, resultaba que $m = f'(a)$.
3. En nuestro caso no nos es posible dividir por $x - a$ ya que éste es un vector, pero este problema lo podemos resolver tomando su norma.

Así pues, la mejor proximación, de un plano a la gráfica del campo f en el punto $(a, b, f(a, b))$ quedará asegurada si

$$lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - m(x - a) - n(y - b)}{||(x, y) - (a, b)||} = 0.$$

Es claro que si tal condición se verifica, entonces $m = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ y $n = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ y por tanto

$$\Pi(f, (a, b)) \equiv z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,(y - b)$$

o, equivalentemente

$$\Pi(f, (a, b)) \equiv z = f(a, b) + < \nabla f(a, b), (x - a, y - b) >,$$

es el plano que mejor se aproxima, plano que recibe el nombre de **plano tangente a la gráfica de f en el punto** $f(a, b)$

Llamaremos **vector normal** de la gráfica de f en el punto $(a, b, f(a, b))$, al vector normal al plano tangente $\Pi(f, (a, b))$, esto es,

$$N(f, (a, b)) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), 1\right)$$

También podemos considerar subconjuntos del espacio $\mathbb{R}^3$ descritos por una ecuación de la forma

$$g(x, y, z) = 0$$

para una cierta función $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Diremos que dichos conjuntos son **superficies definidas de forma implícita**, (piénsese por ejemplo en la esfera, esto es,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}).$$

Si suponemos que dicha función g, es diferenciable, podemos considerar el plano

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a, b, c)\,(x - a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b, c)\,(y - b) + \frac{\partial g}{\partial z}(a, b, c)\,(z - c) = 0$$

que es lo mismo que escribir

$$< \nabla g(a, b, c), (x - a, y - b, z - c) >= 0.$$

Dicho plano es el que mejor se aproxima en el punto $(a, b, c) \in S$ a dicha superficie en un entorno de dicho punto y recibe pues el nombre de **plano tangente a S en el punto** (a, b, c). Así pues al vector normal de dicho plano en el punto (a, b, c) recibe el nombre de **vector gradiente de** g en ese mismo punto.

2.3.4. Vector gradiente y matriz jacobiana

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^q$, a un punto de A y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo **escalar**. Se dice que f tiene **gradiente** en a si admite las q derivadas parciales en a, en cuyo caso definimos el **vector gradiente** de f en a por:

$$\nabla f(a) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_q}(a)) \in \mathbb{R}^q.$$

En el caso de que se consideren campos vectoriales, el concepto de vector gradiente viene sustituido por el de matriz jacobiana.

Sean $A \subseteq \mathbb{R}^q$, a un punto de A y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo **vectorial** que admite todas sus derivadas parciales en a. Se llama **matriz jacobiana** de f en el punto a, $J_f(a)$, a la matriz cuya columna i-ésima son las coordenadas del vector $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, esto es, la matriz de orden $n \times q$, dada por:

$$J_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_q}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_q}(a) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_n}{\partial x_q}(a) \end{pmatrix}$$

Al determinante de la matriz jacobiana, $|J_f(a)|$, se le denomina **jacobiano** del campo f en el punto a.

Notas

1. Obsérvese que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función real de variable real ($q = n = 1$), entonces
$$J_f(a) = f'(a).$$

2. Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, es un campo vectorial que admite todas sus derivadas parciales en un punto a de A, entonces, para cada i, los q números que componen la fila i-ésima de la matriz jacobiana son las componentes del vector gradiente de la función coordenada i-ésima, esto es, $\nabla f_i(a)$.

3. Sea $U = \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[$, $V = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, 0);\ x \leq 0\}$, y la aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ definida por
$$\phi(\rho, \theta) = (\rho cos\theta, \rho sen\theta).$$
En este caso la matriz jacobiana es de la forma
$$J_\phi(\rho, \theta) := \begin{pmatrix} cos\theta & -\rho\ sen\theta \\ sen\theta & \rho\ cos\theta \end{pmatrix}$$

Nótese que su jacobiano, $|J_\phi(\rho, \theta)| = \rho$.

Si calculamos el jacobiano del cambio a coordenadas cilíndricas su valor es también ρ, mientras que el jacobiano del cambio a coordenadas esféricas nos da $\rho^2\ cos\varphi$. En realidad los tres teoremas de cambio de variable dados en anteriormente responden a un esquema más general:

Teorema 2.3.5. *(del cambio de variable)*
Sean U y V dos conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, y $\phi : U \longrightarrow V$ una función biyectiva de clase $\mathcal{C}^1(U)$ cuyo jacobiano es no nulo en todo punto de U. Sea E un subconjunto medible contenido en U y sea $f : \phi(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces
$$\int_{\phi(E)} f d\lambda = \int_E f \circ \phi(y) |J_\phi(y)| dy.$$

Resuélvase a modo de ejemplo, calcúlese el área de una elipse semiejes a y b.

2.3.5. Relación de ejercicios

1. Calcúlese el vector gradiente en un punto arbitrario (x, y) de la función f en cada uno de los siguientes casos:

   a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   b) $f(x, y, z) = x^{y+z}, \forall x \in \mathbb{R}^+, y, z \in \mathbb{R}$

   c) $f(x,y,z) = (x+y)^z, \forall x, y \in \mathbb{R}^+, z \in \mathbb{R}$

2. Calcúlese el plano tangente a las siguientes superficies en el punto que se indica:

   a) $z = \log(1 + x^2 + y^2)$ en $(0,0,0)$.

   b) $z^2 + 3x - x^2 - y^2 = 2$ en $(1,1,1)$.

   c) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ en $(1,2,-1)$.

   d) $z = sen(x)sen(y)$ en $(\pi/2, \pi/4)$.

3. Calcúlese $\int_A f$ en cada uno de los casos siguientes:

   a) $f(x,y) = 1,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1,\ x^2 \leq y\}$

   b) $f(x,y,z) = z, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1, z \geq 0\}$

   c) $f(x,y) = \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right), \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x, y \geq 0,\ x + y \leq 2\}$

2.4. Cálculo de extremos

Sumario

En esta lección vamos a examinar criterios que nos permitan determinar los extremos de un campo escalar. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

2.4.1. Extremos de un campo escalar

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que

(Extremos absolutos)

a es un **máximo absoluto**, ó simplemente que es un máximo, de f, ó que f **alcanza su máximo en** a si se verifica que

$$f(a) \geq f(x),\ \forall x \in A.$$

a es un **mínimo absoluto** ó simplemente que es un mínimo, de f ó que f **alcanza su mínimo en** a si se verifica que

$$f(a) \leq f(x),\ \forall x \in A.$$

a es un **punto extremo** de f si ó bien es un máximo ó bien es un mínimo.

(Extremos relativos)

a es un **máximo relativo** o que f **tiene un máximo relativo en** a si se verifican las siguientes condiciones:

a) Existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq A$.

b) $f(a) \geq f(x),\ \forall x \in B(a, r)$.

a es un **mínimo relativo** o que f **tiene un mínimo relativo en** a si se verifican las siguientes condiciones:

a) Existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subseteq A$.

b) $f(a) \leq f(x),\ \forall x \in B(a,r)$.

a es un **extremo relativo** si o bien es un máximo relativo ó bien es un mínimo relativo.

Como ya vimos en la lección I.8, sabemos que, en general, no existe relación entre extremo relativo y extremo absoluto, Salvo que todo extremo absoluto en un punto interior es también relativo.

2.4.2. Extremos relativos y derivabilidad

Comencemos viendo que en todo extremo relativo las derivadas parciales se anulan. Antes necesitamos la siguiente definición:

Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$, a un punto interior de A y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar que admite todas sus derivadas parciales en a. Diremos que a es un **punto crítico de** f si, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

Proposición 2.4.1. *Sean A es un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^n$, a un punto interior de A y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar que admite todas sus derivadas parciales en a. Si f tiene un extremo relativo en a entonces a es un punto crítico de f.*

Este sencillo resultado nos permite elaborar la siguiente regla práctica para el cálculo de extremos.

Regla práctica para el cálculo de extremos

Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Supongamos que f alcanza su máximo o su mínimo absoluto en a, entonces a está **en una de las tres situaciones siguientes**:

1) a no es un punto interior.

2) a es un punto interior y f no admite alguna derivada parcial en a.

3) a es un punto crítico.

Una vez detectados los candidatos, se nos puede presentar una de las dos siguientes situaciones:

1) El conjunto A es compacto y f es continua.

2) No se dan alguna de las circunstancias del primer apartado.

En el primer caso aplicamos el siguiente teorema de Weiertrass sobre la conservación de la compacidad:

Teorema 2.4.2. *(de Weiertrass o de conservación de la compacidad)*
Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Si A es un conjunto compacto y f es continua en A, entonces f alcanza su máximo y su mínimo en sendos puntos de A.

En tal caso, basta evaluar f en los candidatos de los tres tipos para determinar quienes son estos extremos.

En el segundo caso, nos contentaremos con saber que de haber máximo ó mínimo éste está entre nuestros candidatos.

Ejercicio: Calcúlense, si existen, los extremos de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definida en el conjunto A que es el cuadrado de vértices $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ mediante la ley

$$f(x,y) = xy(1-x)(1-y).$$

¿Qué puede decirse si $A = \mathbb{R}^2$?

2.4.3. Condición suficiente para la existencia de extremos relativos

Vamos ahora a buscar una condición suficiente que nos permita saber cuando un punto crítico es efectivamente un extremo relativo y de qué tipo es. Este tipo de criterios envuelve, como ya pasó en variable real, a las derivadas sucesivas.

Sea A un subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ y a un punto interior de A y supongamos que f admite su derivada parcial j-ésima en una cierta bola centrada en a, $B(a,r) \subseteq A$. Se dice que f **admite la derivada parcial de segundo orden res-pecto de las variables** i,j **en el punto** a, si la función $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ definida en $B(a,r)$ admite derivada parcial i-ésima en el punto a, y notaremos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a) = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_j})}{\partial x_i}(a).$$

Una función de n variables admite, suponiendo que existan todas, n^2 derivadas de orden 2.

De forma análoga se definen las derivadas de orden 3, y de orden k en general. Además, se dice que f es **clase** $C^k(A)$ si existen todas las derivadas parciales de orden k en A y son continuas.

Las derivadas parciales $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(a)$ se las conoce como **derivadas cruzadas**. El siguiente resultado establece una condición suficiente para que estas derivadas cruzadas coincidan.

Lema 2.4.3 (de Schwartz). *Sea A un conjunto abierto de $\mathbb{R}^q$ y $f \in C^2(A)$. Entonces*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(a), \quad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, q\}\ ,\ i \neq j\ .$$

Las derivadas parciales de orden 2 nos permiten construir una matriz que utilizaremos para calcular extremos relativos de campos escalares.

Si f admite todas sus derivadas parciales segundas en a, se define la **matriz hessiana** de f en a por:

$$H_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_n}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n\, \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\, \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\, \partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

En virtud del Lema de Schwartz, si $f \in C^2(A)$, entonces $H(f, a)$ es una matriz simétrica.

Disponemos de dos métodos para el estudio de cuándo un punto crítico es de hecho extremo relativo y cuál es su naturaleza. El primero involucra los determinantes de algunas submatrices de la matriz hessiana y es útil para $n = 2$ ó $n = 3$; el segundo se articula en torno al cálculo de los "valores propios"de la matriz hessiana y resulta útil para $n \geq 3$.

<u>Caso q=2</u>

Proposición 2.4.4. *Sea A es un subconjunto abierto de vectores de $\mathbb{R}^2$, $B \supseteq A$, $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar que admite todas sus derivadas parciales de segundo orden y son continuas en A y sea (a, b) un punto crítico de f.*

1. *Si*
$$det(H_f(a, b)) > 0 \ y\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_1}(a, b) > 0,$$
entonces f tiene en (a, b) un <u>mínimo</u> relativo estricto.

2. *Si*
$$det(H_f(a, b)) > 0 \ y\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_1}(a, b) < 0,$$
entonces f tiene en (a, b) un <u>máximo</u> relativo estricto.

3. *Si*

$$det(H_f(a,b)) < 0,$$

entonces f <u>no</u> tiene ningún extremo relativo en (a,b).

Ejercicio: Calcúlense los extremos de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y.$$

<u>Caso $q \geq 3$</u>

Proposición 2.4.5. *Sea A es un subconjunto abierto de vectores de $\mathbb{R}^3$, $f \in C^2(A)$ y (a,b,c) un punto crítico de f.*

1. *Si*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) > 0, det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b,c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c) \end{pmatrix} > 0, det(H_f(a,b,c)) > 0.$$

entonces f tiene en a un <u>mínimo</u> relativo estricto.

2. *Si*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) < 0, det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b,c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c) \end{pmatrix} > 0, det(H_f(a,b,c)) < 0.$$

entonces f tiene en (a,b,c) un <u>máximo</u> relativo estricto.

3. *Si alguna de las submatrices siguientes*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b,c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a,b,c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a,b,c) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a,b,c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a,b,c) \end{pmatrix},$$

es tal que su determinante es negativo, entonces f <u>no</u> tiene ningún extremo relativo en (a,b,c).

Ejercicio: Calcúlense los extremos de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y,z) = -6x^2 - y^2 - z^2.$$

Caso $q \geq 3$:

Para el segundo método necesitamos definir el concepto de **autovalores ó valores propios** asociados a una matriz.

Dada una matriz cuadrada A, lLamaremos **polinomio característico** asociado a la matriz A al polinomio $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$, donde por I representamos la matriz identidad. Las raíces del polinomio característico reciben el nombre de **autovalores** de la matriz A.

De hecho,

Proposición 2.4.6. *Si representamos por λ_k , $\forall k = 1, 2, \dots q$, los autovalores de la matriz hessiana $H_f(a)$, entonces:*

i. Si $\lambda_k > 0$, $\forall k = 1, 2, \dots n$, f tiene en a un mínimo relativo.

ii. Si $\lambda_k < 0$, $\forall k = 1, 2, \dots n$, f tiene en a un máximo relativo.

iii. Si existen $\lambda_i > 0$ y $\lambda_j < 0$, f no tiene ningún extremo relativo en a.

El único inconveniente que presenta esta clasificación sería, en principio, la dificultad que se puede dar a la hora de calcular los autovalores de la matriz hessiana H. Este problema queda resuelto con la **regla de Silvester** que nos va a permitir decidir el número de autovalores positivos sin necesidad de calcularlos, simplemente observando los coeficientes del polinomio característico de H. Concretamente, si llamamos $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n$ a dicho polinomio, y $V(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ al número de cambios de signo que se dan coeficiente a coeficiente, entonces la regla de Silvester asegura que

$$V(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{ número de autovalores positivos de } H \; .$$

$$V(a_0, -a_1, a_2, \dots, (-1)^n\, a_n) = \text{ número de autovalores negativos de } H \; .$$

2.4.4. Relación de ejercicios

1. Consideremos las funciones reales f y g dadas por:

   a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \;\; \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   b) $g(x, y, z) = (x + z^2)e^{x(y^2+z^2+1)} \;\; \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

   Se pide:

   i) Calcúlense los puntos críticos.
   ii) Calcúlese la matriz hessiana en cada uno de los puntos críticos.
   iii) Estúdiese la existencia de extremos relativos.

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos parámetros, y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de dos variables reales dada por $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$. Estúdiese la existencia de extremos de f en función de los parámetros.

3. Calcúlense los posibles extremos de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2+1}$.

4. Calcúlense los extremos de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

   a) $f(x,y) = x^2 - y^2$.
   b) $f(x,y) = |x| + |y|$.
   c) $f(x,y) = |x| + y$.

5. Estúdiese los extremos de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^4 + 2x^2y - x^2 + 3y^2.$$

6. Una función f definida en un abierto del plano se dice que es **armónica** si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

   en todo punto de su dominio. ¿Son armónicas las siguientes funciones?

   a) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}(\frac{x}{y}) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : \ x \in \mathbb{R}\}$.
   b) $g(x,y) = e^{-x}\cos y + e^{-y}\cos x \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   c) $h(x,y) = \dfrac{e^{x+y}}{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2.5. Extremos condicionados.

Sumario

En esta lección vamos a enunciar criterios que nos permitan determinar los extremos de un campo escalar en un cierto subconjunto del dominio de dicho campo escalar .El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

2.5.1. Motivación

Para motivar esta lección vamos a considerar dos ejemplos:

Ejercicio 1: Sea el triángulo

$$\mathrm{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq y \leq 4\}.$$

Se trata de calcular los extremos de la función $f : \mathrm{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1$.

Dado que T es un conjunto compacto y f es una función continua, sabemos que f alcanza su valor máximo y su valor mínimo en sendos puntos de T. Sabemos que ésta función no tiene ningún punto crítico en dicho conjunto por lo que sus valores máximo y mínimo se alcanzarán en puntos del tipo 1), esto es, ó bien los vértices del triángulo T ó bien en algún punto de sus tres lados. En consecuencia, los puntos del tipo 1) a tener en cuenta son

1) Los tres vértices

2) Para cada lado, los puntos de cada uno de éstos en los que la función restringida alcance sus extremos.

Llamaremos **extremo local de f condicionado por M** a cualquier extremo de la función f restringida a M.

Con la nueva definición, los puntos pues del tipo 1) interesantes son los extremos locales condicionados por M, donde el conjunto M es cada uno los siguientes:

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times]0, 4[: \ x = 0\},$$

$$M_2 = \{(x, y) \in]0, 4[\times\mathbb{R} : \ y = 4\}, \quad M_3 = \{(x, y) \in]0, 4[\times]0, 4[: \ x = y\},$$

$$M_4 = \{(0, 0)\}, \ M_5 = \{(0, 4)\} \ M_6 = \{(4, 4)\}.$$

La búsqueda de los extremos locales condicionados por M_4, M_5 y M_6 es trivial puesto que estos conjuntos constan de un sólo punto. Con respecto a los otros conjuntos bastará eliminar, en cada caso, una variable y calcular los extremos de la correspondiente función real de variable real.

Consideremos el segundo ejemplo:

Ejercicio 2: Consideremos una placa plana P que tiene la forma del disco unidad incluyendo el borde, y que se calienta de manera que la temperatura en un punto $(x, y) \in P$ es

$$T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x - y,$$

y calculemos sus posibles extremos absolutos.

Dado que P es un conjunto compacto y f es un campo continuo, sabemos que f alcanza sus valores máximo y mínimo en sendos puntos de P. Sabemos que $(1/2, 0)$ es el único punto crítico de f, por lo que al menos su valor máximo o mínimo se alcanzará en algún punto del tipo I), esto es, en algún punto de la circunferencia

$$\mathrm{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

El problema es que para calcular los puntos extremos de la función f condicionados por el conjunto C no podemos despejar una variable en función de la otra.

2.5.2. Multiplicadores de Lagrange

Para este último ejercicio, así como en aquellos casos en que haya más de dos variables, necesitaremos desarrollar una nueva técnica.

En el planteamiento del problema del cálculo de extremos condicionados el conjunto M obedece al siguiente esquema general:

Sea A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y f un campo escalar definido en A. Sea M un subconjunto de A al que podemos asociar una función $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ tal que:

1. $M = \{x \in A; \ g(x) = 0\}$.

2. Todas sus funciones coordenadas g_i tienen derivadas parciales continuas en A.
3. Su matiz jacobiana $J_g(x)$ tiene rango $n-k$ en A.

Este hecho se reflejará diciendo que g **determina a** M.

Así pues, en el ejercicio 1, tenemos la siguiente situación:

1. La función $g(x,y)=x$ definida en $A=\mathbb{R}\times]0,4[$ determina a M_1,
2. $g(x,y)=y-4$ definida en $A=]0,4]\times\mathbb{R}$ determina a M_2,
3. $g(x,y)=y-x$ definida en $A=]0,4[\times]0,4[$ a M_3,
4. $g(x,y)=(x,y-x)$ definida en $A=\mathbb{R}^2$ a M_4,
5. $g(x,y)=(x,y-4)$ definida en $A=\mathbb{R}^2$ a M_5,
6. $g(x,y)=(x-4,y-4)$ definida en $A=\mathbb{R}^2$ a M_6.

Y para el ejercicio 2, $g(x,y)=x^2+y^2-1$ y $A=\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ determina a C.

Hagamos ahora la siguiente observación.

Proposición 2.5.1. *Sean A un conjunto abierto, $g=(g_1,g_2,...,g_{n-k})$ una función que determina a un subconjunto M de A y $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ un campo escalar de clase que admite todas sus derivadas parciales en A y son continuas en $a\in M$. Si f alcanza un extremo condicionado por M en a, entonces existe un único $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-k})\in\mathbb{R}^{n-k}$ tal que*

$$\frac{\partial(f+\alpha_1g_1+\alpha_2g_2+...+\alpha_{n-k}g_{n-k})}{\partial x_i}(a)=0,\quad \forall i\in\{1,2,...,n\}.$$

Esto nos proporciona la siguiente

Estrategia: Sean f,A,g,M y a como en el enunciado de la proposición anterior. Para cada $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-k})\in\mathbb{R}^{n-k}$, llamamos L_α a la función definida en A por

$$L_\alpha=f+\alpha_1g_1+\alpha_2g_2+...+\alpha_{n-k}g_{n-k}.$$

La proposición anterior nos afirma que:

"Los extremos de f condicionados por M son soluciones del sistema siguiente, llamado **sistema de Lagrange**.

$\frac{\partial L_\alpha}{\partial x_1}(x)=0,$

$\frac{\partial L_\alpha}{\partial x_2}(x)=0,$

...

$\frac{\partial L_\alpha}{\partial x_n}(x) = 0,$

$g_1(x) = 0, \ ..., \ \ g_{n-k}(x) = 0.$

Si $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-k})$ son solución de este sistema, sabemos que α está determinado de forma única y sus coordenadas reciben el nombre de **Multiplicadores de Lagrange para el punto** a".

Ejercicio: Calcúlense los multiplicadores de Lagrange en los ejercicios anteriores.

2.5.3. Relación de ejercicios

1. Encontrar los puntos donde la función $f : A \to \mathbb{R}$ definida como
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$
alcanza sus extremos absolutos siendo
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x, y \geq 0, \ x + y \leq 3\}.$$

2. Calcúlense los extremos relativos de $f : [-1,1] \times [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos:
   a) $f(x,y) = x^2 - y^2.$
   b) $f(x,y) = |x| + |y|.$
   c) $f(x,y) = |x| + y.$

3. Encontrar los puntos del conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 2x, \ y \geq 0\}$ donde la función $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ alcanza su máximo y mínimo absolutos.

4. Determínese el punto $P(x,y,z)$ en el plano $2x + y - z = 5$ que está más cerca del origen.

5. Calcúlese la distancia mínima del origen a la superficie de $\mathbb{R}^3$ dada por la ecuación $x^2 - z^2 - 1 = 0$

6. Se trata de montar un radiotelescopio en un planeta recién descubierto. Para minimizar la interferencia se desea emplazarlo donde el campo magnético del planeta sea más débil (aunque por supuesto, en la superficie). El planeta es esférico, con un radio de 6 unidades; la fuerza del campo magnético viene dada por

$$M(x, y, z) = 6x - y^2 + xz$$

basado en un sistema coordenado cuyo origen está en el centro del planeta. ¿Dónde habrá de ser ubicado el radiotelescopio?.

7. Determínese el rectángulo de mayor área que se puede inscribir en la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde a, b son reales positivos.

8. Estudiar los extremos de la función $f : (\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = logx + logy + logz$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

9. Hallar la mínima distancia entre la recta $x + y = 4$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

10. Hallar los extremos condicionados de la función $f(x, y) = x^3 + xy^2$ donde $xy - a^2 = 0, \quad (a \neq 0)$.

11. El área de una caja rectangular sin tapa es de $108u^2$. Hallar que dimensiones debe tener para que conseguir el máximo volumen.