

Soluciones de la relación del Tema 9.

1. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. de $X \sim (\mu, \sigma^2)$. Se nos pide:

- Probar que $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ es un estimador insesgado de μ , es decir, debemos comprobar:

$$E\bar{X} = \mu$$

Veámoslo:

$$E\bar{X} = E\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right] = \frac{\sum_{i=1}^n EX_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

- Probar que $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ es un estimador insesgado de σ^2 , es decir, debemos comprobar:

$$ES^2 = \sigma^2$$

Veámoslo:

$$\begin{aligned} ES^2 &= E\left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}\right] = \frac{E[\sum_{i=1}^n (X_i^2 + \bar{X}^2 - 2X_i\bar{X})]}{n-1} = \\ &= \frac{E[\sum_{i=1}^n X_i^2 + n\bar{X}^2 - 2\bar{X}\sum_{i=1}^n X_i]}{n-1} = \frac{E[\sum_{i=1}^n X_i^2 + n\bar{X}^2 - 2n\bar{X}^2]}{n-1} = \\ &= \frac{E[\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2]}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n EX_i^2 - nE\bar{X}^2}{n-1} \end{aligned}$$

Ahora teniendo en cuenta que si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, sabemos que $Var(X) = \sigma^2 = EX^2 - \mu^2$, y que bajo las condiciones del problema se verifica que $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$, podemos concluir:

$$\begin{aligned} ES^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n EX_i^2 - nE\bar{X}^2}{n-1} = \frac{n(\sigma^2 + \mu^2) - n(\sigma^2/n + \mu^2)}{n-1} = \\ &= \frac{n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2}{n-1} = \frac{(n-1)\sigma^2}{n-1} = \sigma^2 \end{aligned}$$

2. Se nos pide calcular $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}^2$ en el caso $X \sim (\mu, \sigma^2)$. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. de X . El espacio paramétrico viene dado por:

$$\Theta = \{(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\} = \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

y la función de densidad de la muestra es:

$$f_{\mu, \sigma^2}^n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sigma^2)^{n/2} (2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

Sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, entonces la función de verosimilitud viene dada por:

$$L_{x_1, \dots, x_n}(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{(\sigma^2)^{n/2} (2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$$

Ahora tomamos logaritmo neperiano para eliminar la exponencial:

$$\ln L_{x_1, \dots, x_n}(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

Para obtener los estimadores máximo verosímiles de los parámetros debemos derivar el logaritmo de la verosimilitud con respecto a los dos parámetros:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L_{x_1, \dots, x_n}(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} &= -\frac{\sum_{i=1}^n 2(x_i - \mu)(-1)}{2\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}{\sigma^2} = 0 \\ \frac{\partial \ln L_{x_1, \dots, x_n}(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n/2}{\sigma^2} - \left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{(2\sigma^2)^2} \right) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^4} = \\ &= \frac{-\sigma^2 n + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^4} = 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación obtenemos:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \Rightarrow \hat{\mu}(X_1, \dots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \bar{X}$$

De la segunda ecuación obtenemos:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2}{n} \Rightarrow \hat{\sigma}^2(X_1, \dots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

3. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. de $X \sim B(1, p)$, por tanto $EX = p$ y $VarX = p(1 - p)$. Se nos pide:

- Probar que $\hat{p}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ es un estimador insesgado de p , es decir, debemos comprobar:

$$E[\hat{p}_1] = p$$

Veámoslo:

$$E[\hat{p}_1] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right] = \frac{\sum_{i=1}^n EX_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n p}{n} = \frac{np}{n} = p$$

- Probar que $\hat{p}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}$ es un estimador insesgado de p , es decir, debemos comprobar:

$$E[\hat{p}_2] = p$$

Veámoslo:

$$E[\hat{p}_2] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}\right] = \frac{\sum_{i=1}^n EX_i^2}{n}$$

Ahora teniendo en cuenta que $Var(X) = p(1 - p) = EX^2 - p^2$ podemos concluir:

$$E[\hat{p}_2] = \frac{\sum_{i=1}^n (VarX_i + (EX_i)^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (p(1 - p) + p^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n p}{n} = \frac{np}{n} = p$$

4. Sea X_1, X_2, X_3 una m.a.s. de $X \sim (\mu, \sigma^2)$. Se nos pide:

- Probar que $\hat{\mu}_1 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}$ es un estimador insesgado de μ . Veámoslo:

$$E[\hat{\mu}_1] = E\left[\frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}\right] = \frac{EX_1 + 2EX_2 + 3EX_3}{6} = \frac{\mu + 2\mu + 3\mu}{6} = \mu$$

- Probar que $\hat{\mu}_2 = \frac{X_1 - 4X_2}{-3}$ es un estimador insesgado de μ . Veámoslo:

$$E[\hat{\mu}_2] = E\left[\frac{X_1 - 4X_2}{-3}\right] = \frac{EX_1 - 4EX_2}{-3} = \frac{\mu - 4\mu}{-3} = \mu$$