Soluciones de la relación del Tema 6.

1. **a)** Definimos X =número de personas con síntomas si examino sólo una persona, la cual sigue una distribución $B(1,p)$, donde

$$p = P(X = 1) = P(\text{la persona presente síntomas}) = 0.35$$

b) Sea X =número de personas con síntomas si examino 5 persona$\sim B(5, 0.35)$. El número medio de personas con gripes coincide con la media de dicha v.a.

$$EX = np = 5 \cdot 0.35 = 1.75$$

c) Sea X =número de personas con síntomas si examino 10 persona$\sim B(10, 0.35)$. La probabilidad pedida es

$$P(X = 8) = \binom{10}{8}(0.35)^8(0.65)^2 = 0.00428$$

d) Sea X =número de personas con síntomas si examino 9 persona$\sim B(9, 0.35)$. La probabilidad pedida es

$$P(2 \leq X \leq 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = (\text{ver tabla}) = \\ = 0.825326$$

e) Sea X =número de personas sin síntomas si examino 6 persona$\sim B(6,p)$, donde ahora,

$$p = P(\text{la persona no presente síntomas}) = \\ 1 - P(\text{la persona presente síntomas}) = 1 - 0.35 = 0.65$$

Esto puede resolverse de dos formas:

- A partir de la definición de la función masa de probabilidad:

$$P(X = 4) = \binom{6}{4}(0.65)^4(0.35)^2 = 0.3280052$$

- A partir de las tablas, definiendo la variable Y =número de personas con síntomas si examino 6 persona$\sim B(6, 0.35)$ y teniendo en cuenta que $Y = 6 - X$, luego

$$P(X = 4) = P(Y = 2) = (\text{ver tabla}) = 0.3280052$$

2. El primer dato que nos aportan es que $P(\text{el artículo producido sea defectuoso}) = 0.1$

a) Sea X =número de artículos defectuosos si examino 10$\sim B(10, 0.1)$. Se nos pide calcular

$$P(X = 2) = 0.1937$$

b) Sea X =número de artículos defectuosos si examino 8$\sim$ $B(8, 0.1)$. Se nos pide calcular

$$\begin{aligned}P(X \geq 2) =& P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)+\\ &+ P(X = 7) + P(X = 8)\end{aligned}$$

o, equivalentemente, teniendo en cuenta que la suma de las probabilidades de todos los posibles valores de la variable es uno, podemos aplicar

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 0.1869$$

lo que simplifica el cálculo.

c) Sea X =número de artículos defectuosos si examino 7 $\sim$ $B(10, 0.7)$, ya que la probabilidad de que el artículo sea defectuoso ahora es 0.7. Ya que el valor de $p > 0.5$, al igual que en el ejercicio 1 apartado (e), este apartado se puede resolver de dos formas:

- A partir de la definición de la función masa de probabilidad:

$$P(X = 5) = \binom{7}{5}(0.7)^5(0.3)^2 = 0.31765$$

- A partir de las tablas, definiendo la variable Y =número de artículos no defectuosos si examino 7 $\sim B(7, 0.3)$ y teniendo en cuenta que $Y = 7 - X$, luego

$$P(X = 5) = P(Y = 2) = \text{(ver tabla)} = 0.31765$$

d) La probabilidad pedida ahora es $P(X \leq 2) = P(X = 0)+P(X = 1)+P(X = 2)$. Al igual que en apartado anterior, dichas probabilidades pueden obtenerse utilizando cualquiera de los dos métodos obteniendo,

$$P(X \leq 2) = 0.0287955$$

3. El primer dato que nos aportan es que $P(\text{el comprimido fabricado sea defectuoso}) = 0.01$

a) Sea X =número de comprimidos defectuosos si examino 25 tubos$\sim$ $B(25, 0.01)$. Se nos pide calcular

$$P(X = 0) = 0.7778$$

b) Sea X =número de tubos sin ningún comprimido defectuosos si examino 10 cajas$\sim$ $B(10, 0.7778)$, ya que la probabilidad de que el un tubo no contenga ningún comprimido defectuoso es 0.7778. Ya que el valor de $p > 0.5$, al igual que en el ejercicio 2, este apartado se puede resolver de las dos formas especificadas anteriormente, obteniendo en ambas:

$$P(X = 10) = 0.0811$$

4. Consideremos la v.a. X =número de llamadas que recibe la centralita en un minuto. Tomamos como unidad temporal el minuto ya que nos preguntan por algo sucedido en un minuto. La distribución de X es una Poisson de parámetro λ, donde λ=número medio de llamadas que recibe la centralita en un minuto. Sabemos que el número medio de llamadas que recibe la centralita por hora son 480 llamadas, luego dividiendo dicha cantidad entre los 60 minutos que tiene una hora, obtenemos que $\lambda = 8$. Una vez especificada la distribución podemos resolver la cuestión planteada. La probabilidad de que no sea posible dar línea, ya que a lo sumo pueden atender 12 llamadas, es equivalente a calcular:

$$P(X > 12) = P(X = 13) + P(X = 14) + \dots$$

Ya que dicho cálculo implica infinitos términos, es preferible obtener la probabilidad utilizando

$$P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - P(X = 0) - \dots - P(X = 12) = (\text{ver tabla}) = 0.0638$$

5. Consideremos la v.a. X =número de partículas que llegan a un contador en un segundo$\sim P(10)$.

a) $P(X < 4) = 0.0104$

b) $P(X < 6) = 0.0671$

c) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 0.9896$

6. Consideremos la v.a. X =número de fallecidos asegurados al año en accidente laboral $\sim P(\lambda)$, donde λ=número medio de fallecidos asegurados al año. Sabemos que el número medio de fallecidos al año es 1 de cada 5000 personas. Ya que tienen aseguradas a 50000 personas, mediante una regla de tres es fácil deducir que $\lambda = 10$. Se nos pide calcular la probabilidad de que la compañía tenga que pagan en un año por lo menos 6 millones de ptas en concepto de primas. Ya que ellos pagan 500000 ptas por póliza, debemos calcular:

$$P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) = 1 - P(X = 0) - \dots - P(X = 11) = (\text{ver tabla}) = 0.3032$$

7. El primer dato que nos aportan es que P(el artículo incluido en el embarque sea defectuoso) $= 0.01$. Sea X =número de artículos defectuosos si examino 30$\sim B(30, 0.01)$. Se nos pide calcular

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

Ya que en la tabla no viene el caso n=30, debemos aproximar la binomial por la un Poisson. Lo primero es ver que se verifican las condiciones para poder realizar la aproximación, $(n \cdot p = 30 \cdot 001 = 0.3 < 5, p = 0.01 \leq 0.1, n = 30 \geq 25)$, luego aproximamos por $P(0.3)$ y calcular la probabilidad pedida:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = (\text{ver en la tabla de la Poisson}) = 0.037$$

8. El primer dato que nos aportan es que P(la unidad inspeccionada sea defectuosa) $= 0.05$.

a) Este experimento consiste en ir inspeccionando las unidades de una línea de ensamble y se considera un éxito encontrar una unidad defectuosa, por tanto la $P(\text{éxito}) = 0.05 = p$. Luego es un experimento que se repite un número indefinido de veces, hasta encontrar dos unidades defectuosas, con probabilidad de éxito p. Por tanto si consideramos la v.a. $X =$número de piezas buenas inspeccionadas antes de encontrar la segunda defectuosa, dicha variable sigue una distribución $BN(2, 0.05)$ y se nos pide calcular:

$$P(X = 18) = \binom{18+2-1}{18}(0.05)^2(0.95)^{18} = 0.0188676$$

b) Ahora sea $X =$número de piezas buenas inspeccionadas antes de encontrar la cuarta defectuosa$\sim BN(4, 0.05)$ y nos piden obtener el número medio:

$$EX = \frac{k(1-p)}{p} = \frac{4(1-0.05)}{0.05} = 76 \text{ unidades}$$

c) Para la misma variable del ejercicio anterior se nos pide calcular:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{k(1-p)}{p^2}} = 38.981 \text{ unidades}$$

9. El primer dato que nos aportan es que de una población de tamaño $N = 10000$, se ha extraído una muestra de tamaño $n = 100$ poniendo a estos una anilla que los diferencia del resto. Más tarde se capturan de nuevo $k = 100$ peces y se cuentan cuantos de éstos tienen anillas. Luego considero la v.a. $X =$número de peces anillados capturados en una muestra de 100 de una población de 10000$\sim H(N, n, k) = H(10000, 100, 100)$.

a) Se nos pide calcular:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$$

Para calcular la probabilidad indicada podemos acudir a la definición de la distribución de probabilidad de la variable definida o aproximarla por una distribución binomial. Ya que se verifican las condiciones para dicha aproximación, $(n/N = 0.01 \leq 0.1)$, aproximamos la distribución hipergeométrica por una binomial $B(n, k/n) = B(100, 0.01)$ y calculamos dicha probabilidad:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0.6339$$

b) $EX = \dfrac{nk}{N} = \dfrac{100 \cdot 100}{10000} = 1$ pez

10. Si consideramos la v.a. $X =$cantidad aleatoria en Kg. demandada durante cierto período de tiempo, sabemos que dicha variable no supera la tonelada, lo que equivale a decir que se distribuye en el intervalo $[0, 1000]$, luego $X \sim U(0, 1000)$.

a) Se nos pide calcular:

$$P(X < 900) = \frac{900 - 0}{1000 - 0} = 0.9$$

b) $P(800 < X < 900) = P(X < 900) - P(X < 800) = 0.9 - \dfrac{800 - 0}{1000 - 0} = 0.1$

b) $EX = \dfrac{a + b}{2} = \dfrac{0 + 1000}{2} = 500$ Kg.

11. Sea $X \sim U(a, b)$. Sabemos: $\begin{cases} EX = \dfrac{a+b}{2} = 10 \\ VarX = \dfrac{(b-a)^2}{12} = 12 \end{cases}$

es decir, tras despejar los cocientes, tenemos el sistema: $\begin{cases} a + b = 20 \\ (b-a)^2 = 12^2 \end{cases}$

que equivale al siguiente sistema lineal $\begin{cases} a + b = 20 \\ b - a = 12 \end{cases}$

el cual tiene por solución $a = 4$ y $b = 16$.

12. Sea X =temperatura en una región durante un año$\sim (\mu, \sigma)$ con $\begin{cases} \mu = 25 \\ \sigma = 10 \end{cases}$

a) Se nos pide calcular $P(20 < X < 32)$ para lo cual tipificamos la variable:

$$P\left(\frac{20-25}{10} < X < \frac{32-25}{10}\right) = P(-0.5 < Z < 0.7) = P(Z < 0.7) - P(Z < -0.5)$$

Utilizando las propiedades de simetría de la normal y las tablas obtenemos:

$$P(20 < X < 32) = (1 - P(Z > 0.7)) - P(Z > 0.5) = 1 - 0.242 - 0.3085 = 0.4495$$

b) Se nos pide calcular:

$$P(|X - 25| \geq 5) = P(25 - 5 \leq X \leq 25 + 5) = P(20 \leq X \leq 30)$$

para lo cual, al igual que antes tipificamos la variable:

$$P\left(\frac{20-25}{10} < X < \frac{30-25}{10}\right) = P(-0.5 < Z < 0.5) = P(Z < 0.5) - P(Z < -0.5)$$

Utilizando las propiedades de simetría de la normal y las tablas obtenemos:

$$P(|X - 25| \geq 5) = (1 - P(Z > 0.5)) - P(Z > 0.5) = 1 - 2 \cdot 0.3085 = 0.383$$

13. Sea X =demanda semanal de gasolina$\sim (150000, 10000)$. Se nos pide calcular la cantidad mínima C que hay que tener dispuesta a al venta para satisfacer la demanda semanal con una probabilidad del 95 %, es decir, calcular el valor de C que satisfaga $P(X \leq C) = 0.95$. Tipificando la variable obtenemos

$$P\left(Z \leq \frac{C - 150000}{10000}\right) = 0.95$$

Estamos buscando el valor de una normal que deja a su izquierda una probabilidad de 0.95. En las tablas comprobamos que el valor 1.64 deja una probabilidad de 0.9495 y el valor 1.65 deja una probabilidad de 0.95053, luego el valor que buscamos debe estar entre 1.64 y 1.65. Para obtenerlo vamos a realizar una proporción lineal, mediante una razón de triángulos obteniendo:

$$\frac{x - 1.64}{0.95 - 0.9495} = \frac{1.65 - 1.64}{0.95053 - 09495}$$

de donde, despejando, obtenemos $x = 1.64485$, y por tanto

$$\frac{C - 150000}{10000} = 1.64485$$

Despejando ahora C se deduce que la cantidad mínima que debemos tener dispuesta a la venta es de 166448.5 litros.

14. Sea X =venta de un artículo$\sim (\mu, \sigma^2)$. Se nos informa de que:

- El 20 % de las ventas son superiores a 1000 euros: $P(X > 1000) = 0.2$
- El 30 % de las ventas no superan los 800 euros: $P(X \leq 800) = 0.3$

a) Se nos pide calcular la media y la varianza de la distribución, es decir μ y σ^2. Ya que sabemos que:

$$P(X > 1000) = 0.2 \Rightarrow P\left(Z > \frac{1000 - \mu}{\sigma}\right) = 0.2$$
$$P(X \leq 800) = 0.3 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{800 - \mu}{\sigma}\right) = 0.3$$

buscamos los valores de una $\mathcal{N}(0,1)$ que deja a la derecha una probabilidad de 0.2 (0.84) y a la izquierda una probabilidad de 0.3 (-0.525), con lo que obtendríamos el sistema:

$$\frac{1000 - \mu}{\sigma} = 0.84 \Rightarrow 1000 = \mu + 0.84\sigma$$
$$\frac{800 - \mu}{\sigma} = -0.525 \Rightarrow 800 = \mu - 0.525\sigma$$

Resolviendo el sistema obtenido llegamos a que $\sigma = 146.52$ y $\mu = 876.923$.

b) Dada la función $Y = 350 + X - 0.00015X^2$, se nos pide calcular la $E[Y]$.

$$E[Y] = 350 + E[X] - 0.00015E[X^2]$$

Como sabemos $\sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2$ y $E[X] = \mu$, por tanto, $E[X^2] = \sigma^2 + \mu^2$. Sustituyendo en la expresión anterior los valores obtenidos en el apartado anterior tenemos:

$$E[Y] = 350 + \mu - 0.00015(\sigma^2 + \mu^2) = 1108.35369$$

15. Sea X =número de veces que sale el 6 al lanzar un dado 720 veces$\sim B(720, p)$, donde $p = P(\text{salga el 6 al lanzar un dado}) = 1/6$.

a) Como ya hemos dicho, esta variable se distribuye mediante una Binomial con $n = 720$ y $p = 1/6$, por tanto

$$P(X = x) = \binom{720}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(1-\frac{1}{6}\right)^{720-x} \quad x = 0, 1, \ldots, 720.$$

b) Se nos pide calcular la media y la varianza de una distribución binomial.

$$E[X] = np = 720 \cdot \frac{1}{6} = 120$$
$$Var[X] = np(1-p) = 720 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1-\frac{1}{6}\right) = 100$$

c) Para calcular la probabilidad que se nos pide podríamos utilizar la ley de probabilidad vista en el apartado (a), pero el número combinatorio resultante no se puede calcular con una calculadora, sería necesario un ordenador. Existe otra opción para calcular la probabilidad de una binomial, cuando n es muy grande, y es aproximarla por una distribución normal. Las condiciones para poder aproximar una distribución $B(n, p)$ por una $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ son $pn > 5$ y $p \geq 0.05$. En este caso ambas condiciones se verifican: $np = 120 > 5$ y $p = 0.1667 \geq 0.05$, por tanto aproximamos nuestra binomial por $\mathcal{N}(120, 100)$. Una vez realizada la aproximación surge otro problema ya que se nos pide calcular la probabilidad de una igualdad en una distribución discreta, pero al pasarnos a una distribución continua por la aproximación, resulta que la probabilidad de una igualdad en distribuciones continuas es siempre 0. Para evitar este inconveniente al realizar la aproximación cambiaremos la probabilidad de igualdad por la de desigualdad restando y sumando 0.05 al valor pedido:

$$P(X = 3) = P(29.5 \leq X \leq 30.5)$$

ahora tipificando

$$P\left(\frac{29.5-120}{10} \leq Z \leq \frac{30.5-120}{10}\right) = P(-9.05 \leq Z \leq -8.95) =$$

$$P(Z \leq -8.95) - P(Z \leq -9.05) = P(Z > 8.95) - P(Z > 9.05) \approxeq 0$$

De todas formas, en este caso, la probabilidad resultó ser casi cero.

d) Al igual que antes, usaremos la aproximación a una normal.

$$P(100 < X < 125) = P(100 \leq X \leq 125) = P(-2 \leq Z \leq 0.5)$$

$$P(Z \leq 0.5) - P(Z \leq -2) = 1 - P(Z > 0.5) - P(Z > 2) = 0.6687$$
$$P(X \geq 150) = P(Z \geq 3) = 0.00135$$

16. Sea X =número de piezas defectuosas en un proceso de fabricación$\sim P(16)$.

a) Esta variable se distribuye mediante una Poisson con $\lambda = 16$, por tanto

$$P(X = x) = e^{-16}\,\frac{16^x}{x!}$$

b) Se nos pide calcular la media y la varianza de una distribución de Poisson.

$$E[X] = \lambda = 16$$
$$Var[X] = \lambda = 16$$

c) Al igual que en el ejercicio anterior, para calcular la probabilidad que se nos pide podríamos utilizar la ley de probabilidad vista en el apartado (a), o aproximarla por una distribución normal $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$. En este caso aproximamos nuestra Poisson por $\mathcal{N}(16, 16)$. Calculemos la probabilidad pedida:

$$P(X = 8) = P(7.5 \leq X \leq 8.5) = P(-2.125 \leq Z \leq -1.875) = 0.0137$$

d) Se nos pide calcular el número de defectuosas, k, que como máximo se puede encontrar con probabilidad 0.9772, es decir que verifique $P(X \leq k) = 0.9772$, o equivalentemente, como el número de defectuosas es siempre mayor o igual que 0, que verifique $P(0 \leq X \leq k) = 0.9772$. Al igual que antes, usaremos la aproximación a una normal.

$$P(0 \leq X \leq k) = 0.9772 \Rightarrow P\left(-4 \leq Z \leq \frac{k-16}{4}\right) = 0.9772 \Rightarrow$$

$$P\left(Z \leq \frac{k-16}{4}\right) - P(Z \leq -4) = 0.9772 \Rightarrow$$

$$P\left(Z \leq \frac{k-16}{4}\right) = 0.9772 + P(Z > 4) = 0.9772317 \Rightarrow$$

$$P\left(Z > \frac{k-16}{4}\right) = 1 - 0.9772317 = 0.0227683 \Rightarrow$$

Buscando ahora el valor de una normal estándar que deja a la derecha una probabilidad de 0.0227683 (2), obtenemos la igualdad

$$\frac{k-16}{4} = 2 \Rightarrow k = 24$$

es decir, el número máximo de defectuosas que se puede encontrar con la probabilidad indicada es de 24.