

Soluciones de la relación del Tema 5.

1.

$$E[X] = (-2) \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.1 + (-1) \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.4 = 0$$

$$E[X^2] = (-2)^2 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.1 + (-1)^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.2 + 0^2 \cdot 0.4 = 1.2$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 1.2$$

$$E[y] = (-2)^2 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.1 + (-1)^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.2 + 0^2 \cdot 0.4 = 1.2$$

2. Consideremos las siguientes variables: X = número de ejemplares e Y = ingresos de la autora.

Según el enunciado del problema, la relación que une estas variables es: $Y = 11X + 6200$ euros. Además sabemos que $E[X] = 20000$ y $\sigma(X) = 4000$. Queremos calcular $E[Y]$ y $\sigma(Y)$.

$$E[Y] = 11 \cdot E[X] + 6200 = 11 \cdot 20000 + 6200 = 226200$$

$$\sigma(Y) = 11 \cdot \sigma(X) = 11 \cdot 4000 = 44000$$

3. a) Lo primero es calcular k para que f sea de verdad una función de densidad, es decir debe verificar ser siempre positiva, lo cual lo verifica sin problemas, y además $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. Calculando dicha integral e igualándola a 1 obtenemos la siguiente ecuación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 k(1-x) dx = k \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = k \frac{1}{2} = 1$$

de donde despejando obtenemos $k = 2$. Luego,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x 2(1-u) du = 2 \left(u - \frac{u^2}{2} \right) \Big|_0^x = 2 \left(x - \frac{x^2}{2} \right) = 2x - x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } E[X] = \int_0^1 x 2(1-x) dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 2(1-x) dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

$$m_3 = E[X^3] = \int_0^1 x^3 2(1-x) dx = 2 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

$$\text{c) } P(X > -2) = 1 - F(-2) = 1$$

$$P(0 < X < 0.5) = F(0.5) - F(0) = 0.75$$

$$P(0.5 < X < 1.5) = F(1.5) - F(0.5) = 0.25$$

4. Lo primero es calcular k de forma análoga al ejercicio 3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{10} \frac{k}{\sqrt{x}} dx = 2k \int_0^{10} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2k\sqrt{x} \Big|_0^{10} = 2k\sqrt{10} = 1$$

de donde despejando obtenemos $k = 1/2\sqrt{10}$. Calculemos ahora lo que nos piden:

$$E[X] = \int_0^{10} x \frac{1}{2\sqrt{10}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2\sqrt{10}} \int_0^{10} \frac{x}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2\sqrt{10}} \int_0^{10} x^{1/2} dx = \frac{1}{2\sqrt{10}} \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^{10} = \frac{10}{3}$$

$$E[X^2] = \int_0^{10} x^2 \frac{1}{2\sqrt{10}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2\sqrt{10}} \int_0^{10} \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2\sqrt{10}} \int_0^{10} x^{3/2} dx = \frac{1}{2\sqrt{10}} \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_0^{10} = 20$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 20 - \frac{100}{9} = \frac{80}{9}$$

5. a) Lo primero es calcular $E[X]$,

$$E[X] = 1 \cdot 0.07 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.23 + 5 \cdot 0.15 + 6 \cdot 0.15 = 3.74$$

Calculemos ahora la probabilidad pedida:

$$\begin{aligned} P[|X - E[X]| < 2] &= P[|X - 3.74| < 2] = P[-2 < X - 3.74 < 2] = \\ &= P[1.74 < X < 5.74] = P[X = 2] + P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5] = 0.78 \end{aligned}$$

b) Para la cota usamos la desigualdad de Tchebichev: $P[|X - E[X]| \geq t] \leq \frac{Var[X]}{t^2}$.

Para ello hay que calcular primeramente la $Var[X]$:

$$E[X^2] = 1^2 \cdot 0.07 + 2^2 \cdot 0.1 + 3^2 \cdot 0.3 + 4^2 \cdot 0.23 + 5^2 \cdot 0.15 + 6^2 \cdot 0.15 = 16$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 2.0124$$

Para calcular la probabilidad que queremos, debemos cambiar la desigualdad de la siguiente forma: $P[|X - E[X]| < t] \geq 1 - \frac{Var[X]}{t^2}$, luego

$$P[|X - E[X]| < 2] \geq 1 - \frac{Var[X]}{2^2} = 0.4963$$