Soluciones de la relación del Tema 4.

1. X =número de bolas blancas obtenidas al sacar al azar dos bolas de una urna que contiene 10 bolas de las que 8 son blancas.

Distribución de probabilidad:

$P(X=0) = P(N \cap N) = \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{90} = \dfrac{1}{45}$

$P(X=1) = P(NB \cup BN) = \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{8}{9} + \dfrac{8}{10} \cdot \dfrac{2}{9} = \dfrac{16}{45}$

$P(X=2) = P(BB) = \dfrac{8}{10} \cdot \dfrac{7}{9} = \dfrac{28}{45}$

Función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ P(X=0) = \dfrac{1}{45} & 0 \leq x < 1 \\ P(X=0) + P(X=1) = \dfrac{17}{45} & 1 \leq x < 2 \\ P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

2. Para que sea una distribución de probabilidad debe verificar: $\sum_{i=2}^{n} P(X = i) = 1$. Imponiendo esto obtenemos la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=2}^{n} P(X=i) = \sum_{i=2}^{n} k\left(\frac{i-1}{n}\right) = \frac{k}{n}\sum_{i=2}^{n}(i-1) = \frac{k}{n}(1+2+\ldots+n-1) = \frac{k}{n}\frac{n(n-1)}{2} = 1$$

de donde despejando se obtiene: $k = \dfrac{2}{n-1}$.

3. **a**) Debemos comprobar que $\sum_{i=1}^{\infty} P(X=i) = 1$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \text{suma de serie geométrica de razón } 1/2¡1 = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

b) $$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ P(X=1) = \dfrac{1}{2} & 1 \leq x < 2 \\ P(X=1) + P(X=2) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{i} P(X=j) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^i} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{i+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2^i} & i \leq x < i+1 \\ \vdots & \vdots \end{cases}.$$

c) $P(X=4) = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$,

$P(X<4) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = P(X \leq 3) = F(3) = 1 - \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{7}{8}$,

$P(3 \leq X \leq 10) = P(X=3) + P(X=4) + \cdots + P(X=10) = P(X \leq 10) -$
$-P(X \leq 2) = F(10) - F(2) = 1 - \frac{1}{2^{10}} - \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{10}}$,
$P(3 < X \leq 10) = P(X=4) + \cdots + P(X=10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 3) = F(10) - F(3) = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^{10}}$,
$P(3 < X < 10) = P(X=4) + \cdots + P(X=9) = P(X \leq 9) - P(X \leq 3) = F(9) - F(3) = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^9}$.

4. **a**) Para que f sea una función de densidad debe verificar ser siempre positiva, lo cual lo verifica sin problemas, y además $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Calculando dicha integral e igualándola a 1 obtenemos la siguiente ecuación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{3} \frac{1}{6}x + k\,dx + \int_{3}^{\infty} 0\,dx = \frac{1}{6}\frac{x^2}{2} + kx\Big]_0^3 = \frac{1}{6}\frac{3^2}{2} + k3 - 0 - 0 =$$

$$= \frac{3+12k}{4} = 1$$

de donde despejando obtenemos $k = 1/12$.

b) $P(0 < X < 1.5) = \int_0^{1.5} \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}\,dx = \frac{1}{6}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{12}x\Big]_0^{1.5} = \frac{1}{6}\frac{(1.5)^2}{2} + 1.5\,\frac{1}{12} = 0.3125$

c) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x \frac{1}{6}u + \frac{1}{12}\,du = \frac{1}{6}\frac{u^2}{2} + \frac{1}{12}u\Big]_0^x = \frac{x^2+x}{12} & 0 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$

5. **a**) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x \frac{1}{8}\,du = \frac{1}{8}u\Big]_0^x = \frac{1}{8}x & 0 \leq x < 8 \\ 1 & x \geq 8 \end{cases}$

b) $P(0 \leq X \leq 2) = F(2) - F(0) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$,
$P(2 \leq X \leq 4) = F(4) - F(2) = \frac{4}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$,
$P(X \geq 6) = 1 - F(6) = 1 - \frac{6}{8} = \frac{1}{4}$.

6. **a**) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^5 kx\,dx = k\,\frac{x^2}{2}\Big]_0^5 = k\,\frac{5^2}{2} = 1$
de donde despejando obtenemos $k = 2/25$.

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{25} & 0 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$

c) $P(0 \leq X \leq 1) = F(1) - F(0) = \dfrac{1}{25}$,

$P(X \geq 2) = 1 - F(2) = 1 - \dfrac{4}{25} = \dfrac{21}{25}$.

7. Lo primero es calcular k para que efectivamente f sea una función de densidad.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} k(1-x^2)\,dx = k\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_{-1}^{1} = k\,\frac{4}{3} = 1$$

de donde despejando obtenemos $k = 3/4$. Ya que el error máximo permitido es del 0.5 %, en un envase de 80 Kg. se admite una variación de peso de $80 \cdot 0.005 = 0.4$kg. Para responder a la pregunta de si nos parece fiable el proceso necesitamos saber la probabilidad de fallar, o de no fallar. La probabilidad de no fallar es:

$$P(-0.4 \leq X \leq 0.4) = \int_{-0.4}^{0.4} \frac{3}{4}\,(1-x^2)\,dx = 0.568$$

luego la probabilidad de fallar es 1-0.568=0.432 que es excesivamente alta, por tanto no parece que el proceso sea muy fiable.

8. Para obtener la función de densidad conocida la función de distribución basta con derivar esta última.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{e^{-x/100}}{100} & x > 0 \end{cases}$$

Para calcular la probabilidad de que la vida del componente sea inferior a 350, basta con calcular:

$$P(X < 350) = F(350) = 1 - e^{-350/100} = 1 - e^{3.5} = 0.96981$$

9. **a**) Como $Y = X + 2$ si $x \in \{-2,-1,0,1,2\}$ entonces $y \in \{0,1,2,3,4\}$. Para calcular la función masa de probabilidad asociada a la variable Y debemos calcular:

$$P(Y = y) = P(X + 2 = y) = P(X = y - 2)$$

para cada uno de los valores que puede tomar la variable Y, por tanto:

$$P(Y=0) = P(X=-2) = \frac{1}{5} \qquad P(Y=1) = P(X=-1) = \frac{1}{10}$$
$$P(Y=2) = P(X=0) = \frac{1}{5} \qquad P(Y=3) = P(X=1) = \frac{2}{5}$$
$$P(Y=4) = P(X=2) = \frac{1}{10}$$

b) Al igual que antes, como $Y = X^2$ si $x \in \{-2,-1,0,1,2\}$ entonces $y \in \{0,1,4\}$. Para calcular la función masa de probabilidad asociada a la variable Y debemos calcular:

$$P(Y = y) = P(X^2 = y) = P(|X| = \sqrt{y}) = P(-X = \sqrt{y}) + P(X = \sqrt{y})$$

para cada uno de los valores que puede tomar la variable Y, por tanto:

$$
\begin{aligned}
P(Y=0) &= P(X=0) = \frac{1}{5} \\
P(Y=1) &= P(X=-1) + P(X=1) = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2} \\
P(Y=4) &= P(X=-2) + P(X=2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}
\end{aligned}
$$

10. **a**) Como $Y = 2X+1$ entonces $\dfrac{Y-1}{2} = X$ y por tanto $h^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$. Por otro lado,

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow 1 \leq 2x+1 \leq 5 \Rightarrow 1 \leq y \leq 5$$

Para calcular la función de densidad asociada a la variable Y, g, aplicando el teorema del cambio de variable obtenemos:

$$g(y) = f\left(\frac{y-1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

luego,

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 1 \leq y \leq 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) Al igual que antes, como $Y = X^2$ entonces $\sqrt{Y} = |X| = X$ ya que la variable X sólo toma valores positivos. Por tanto $h^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Por otro lado,

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq y \leq 4$$

Para calcular la función de densidad asociada a la variable Y, g, aplicando el teorema del cambio de variable obtenemos:

$$g(y) = f(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{4\sqrt{y}}$$

luego,

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{y}} & 0 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$