**Soluciones de la relación del Tema 11.**

**1.** Sea $X$ = ahorro anual de las familias de una localidad $\sim \mathcal{N}(\mu, 20)$.

**a**) Se nos pide un intervalo de confianza para $\mu$ con varianza conocida, luego debemos calcular:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,, \overline{x} + z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El enunciado nos aporta la siguiente información: $n = 25$, $\sigma = 20$, $\overline{x} = 5$ y $1 - \alpha = 0.95$, luego $z_{\alpha/2} = 1.96$ y el intervalo pedido es:

$$\left(5 - 1.96\,\frac{20}{\sqrt{25}}\,, 5 + 1.96\,\frac{20}{\sqrt{25}}\right) = (-2.84, 12.84)$$

**b**) Ya que el intervalo de confianza contiene a valores menores o iguales que cero, no se podría descartar la posibilidad de que las familias de esta localidad no ahorran anualmente. Otra forma de responder a dicha cuestión sería realizar un contraste de hipótesis para ver si $\mu \leq 0$ con un nivel de significación del 5 %:

$$\begin{cases} H_0 \equiv \mu \leq 0 \\ H_1 \equiv \mu > 0 \end{cases}$$

Este es un contraste de tipo a2 y el estadístico del contraste, bajo la hipótesis nula es:

$$z_{exp} = \frac{\overline{x} - 0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{5 - 0}{20/\sqrt{25}} = 1.25$$
$$z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$$

Como $z_{exp} \leq z_\alpha$, aceptamos la hipótesis nula, luego no podemos descartar que las familias de esta localidad no ahorren anualmente, con nivel de significación de 0.05 (error de tipo I).

**2.** Sea $X$ = factura eléctrica mensual de un determinado tipo de empresas $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. El enunciado nos aporta la siguiente información: $n = 30$, $\overline{x} = 1256$, $S = 212$ y $1-\alpha = 0.99$. Para responder a la cuestión planteada debemos realizar un contraste de hipótesis para ver si $\sigma \geq 200$, con $\mu$ desconocida y con un nivel de significación del 1 %. Pero para poder aplicar uno de los contrastes estudiados debemos plantearnos el siguiente:

$$\begin{cases} H_0 \equiv \sigma^2 \geq (200)^2 \\ H_1 \equiv \sigma^2 < (200)^2 \end{cases}$$

Este es un contraste de tipo d3 y el estadístico del contraste, bajo la hipótesis nula, es:

$$\chi^2_{exp} = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{29 \cdot (212)^2}{(200)^2} = 32.5844$$
$$\chi^2_{n-1,1-\alpha} = \chi^2_{29,0.99} = 14.3$$

Como $\chi^2_{exp} > \chi^2_{n-1,1-\alpha}$, no podemos rechazar la hipótesis nula, luego podemos admitir la hipótesis del ministerio, con nivel de significación de 1 %.

**3.** Sea $X$ = ventas, por establecimiento autorizado, de una marca de relojes $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. El enunciado nos aporta la siguiente información: $n = 51$, $\sum x_i = 864$, $\sum x_i^2 = 15176$.

Teniendo en cuenta que se lanza una campaña publicitaria si las ventas medias caen por debajo de 1700 euros mensuales, es decir 17 cientos de euros mensuales, para responder vamos a realizar un contraste de hipótesis para ver si $\mu < 17$, con varianza desconocida y con un nivel de significación del 5 % (tener en cuenta que en la hipótesis nula siempre debe plantearse una desigualdad, luego pondremos nuestra hipótesis en la hipótesis alternativa):

$$\begin{cases} H_0 \equiv \mu \geq 17 \\ H_1 \equiv \mu < 17 \end{cases}$$

Este es un contraste de tipo b3 y el estadístico del contraste, bajo la hipótesis nula es:

$$t_{exp} = \frac{\overline{x} - 17}{S/\sqrt{n}}$$

Lo primero es calcular la media muestral y la cuasi-desviación típica muestral:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{\sum x_i}{n} = \frac{864}{51} = 16.941 \\ S^2 &= \frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2 - n\overline{x}^2\right) = \frac{1}{50}\left(15176 - 51 \cdot (16.941)^2\right) = 10.776471 \\ S &= \sqrt{S^2} = 3.28275 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} t_{exp} &= \frac{16.941 - 17}{3.28275/\sqrt{51}} = -0.1283 \\ t_{n-1,\alpha} &= t_{50,0.05} = 1.677 \text{ (interpolando entre } t_{40,0.05} \text{ y } t_{60,0.05}) \end{aligned}$$

Como $t_{exp} > t_{n-1,\alpha}$, aceptamos la hipótesis nula ($\mu \geq 17$), luego no se considerará oportuno o necesario lanzar una nueva campaña publicitaria.

**4.** Sean $X$ = niveles de audiencia de la serie A $\sim \mathcal{N}(\mu_x, 0.1)$ e $Y$ = niveles de audiencia de la serie B $\sim \mathcal{N}(\mu_y, 0.21)$. Para responder a la cuestión planteada vamos a realizar un contraste de hipótesis para ver si $\mu_x = \mu_y$, con varianzas conocidas y con un nivel de significación del 5 %:

$$\begin{cases} H_0 \equiv \mu_x = \mu_y \\ H_1 \equiv \mu_x \neq \mu_y \end{cases}$$

Este es un contraste de tipo e1 y el estadístico del contraste, bajo la hipótesis nula es:

$$z_{exp} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}}$$

Lo primero es calcular las media muestrales y los tamaños muestrales a partir de los datos proporcionados:

$$\begin{aligned} n_x &= n_y = 8 \\ \overline{x} &= \frac{\sum x_i}{n_x} = \frac{18.76}{8} = 2.345 \\ \overline{y} &= \frac{\sum y_i}{n_y} = \frac{17.99}{8} = 2.249 \end{aligned}$$

Luego

$$z_{exp} = \frac{2.345 - 2.249}{\sqrt{\frac{(0.1)^2}{8} + \frac{(0.21)^2}{8}}} = 1.1674$$

$$\text{Región de aceptación} = (-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}) = (-1.96\,, 1.96)$$

Como $z_{exp}$ está dentro de la región de aceptación, no hay evidencias para rechazar la hipótesis nula al nivel de significación del 5 % y, por tanto, admitimos que los niveles de audiencia son similares.

**5.** Sean $X$ = salarios mensuales pagados a hombres $\sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y$ = salarios mensuales pagados a mujeres $\sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y)$, variables independientes. El problema nos proporciona, además, los siguientes datos:

$$\begin{aligned} & n_x = n_y = 10 \\ & \sum_{i=1}^{10} x_i = 171 \qquad \sum_{i=1}^{10} y_i = 135 \\ & \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 2967 \qquad \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 1841 \end{aligned}$$

Se nos plantean las siguientes cuestiones:

**a**) Para responder a la cuestión planteada vamos a realizar un contraste de hipótesis para ver si $\mu_x = 14$, con varianza desconocida y con un nivel de significación del 5 %:

$$\begin{cases} H_0 \equiv \mu_x = 14 \\ H_1 \equiv \mu_x \neq 14 \end{cases}$$

Este es un contraste de tipo b1 y el estadístico del contraste, bajo la hipótesis nula es:

$$t_{exp} = \frac{\overline{x} - 14}{S_x/\sqrt{n_x}}$$

Lo primero es calcular la media muestral y la cuasivarianza muestral a partir de los datos proporcionados:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n_x} = \frac{171}{10} = 17.1 \text{ cientos de euros}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n_x - 1}\left(\sum x_i^2 - n_x(\overline{x})^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{9}\left(2967 - 10(17.1)^2\right)} = 2.1833 \text{ cientos de euros}$$

Luego

$$t_{exp} = \frac{17.1 - 14}{2.1833/\sqrt{10}} = 4.49$$

$$\text{Región de aceptación} = (-t_{n_x-1,\alpha/2}, t_{n_x-1,\alpha/2}) = (-2.262\,, 2.262)$$

Como $t_{exp}$ está fuera de la región de aceptación, según los datos obtenidos, rechazamos la hipótesis nula al nivel de significación del 5 %.

**b**) Se nos pide obtener un intervalo de confianza para $\dfrac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}$ al 95 % de confianza, luego debemos calcular:

$$\left( F_{n_x-1,n_y-1,1-\alpha/2}\,\frac{S_y^2}{S_x^2}\,, F_{n_x-1,n_y-1,\alpha/2}\,\frac{S_y^2}{S_x^2} \right)$$

Mediante los datos aportados por el enunciado podemos calcular los datos que nos faltan:

$$S_x^2 = (2.1833)^2 = 4.767$$

$$S_y^2 = \sqrt{\frac{1}{n_y - 1}\left(\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i^2)}{n_y}\right)} = \sqrt{\frac{1}{9}\left(1841 - \frac{(135)^2}{10}\right)} = 2.0556$$

$$F_{9,9,0.025} = 4.03$$

$$F_{9,9,0.975} = \frac{1}{F_{9,9,0.025}} = 0.2481$$

obteniendo

$$\left(0.2481\,\frac{2.0556}{4.767}\,, 4.03\,\frac{2.0556}{4.767}\right) = (0.106, 1.73)$$

**c**) Para responder a la cuestión planteada vamos a realizar un contraste de hipótesis para ver si $\mu_x > \mu_y$, con varianzas desconocidas y con un nivel de significación del 5 %. Dicho contraste sólo sabemos hacerlo en el caso en que las varianzas de las dos poblaciones bajo estudio sean iguales. Luego, en primer lugar, debería contrastar si las varianzas, según los datos, puedo aceptar que son iguales. En este caso puedo evitar realizar dicho contraste ya que he obtenido un intervalo de confianza para el cociente de varianzas y éste contiene al valor 1, luego puedo admitir la igualdad de varianzas al nivel de significación indicado y realizar el contraste:

$$\begin{cases} H_0 \equiv \mu_x \leq \mu_y \\ H_1 \equiv \mu_x > \mu_y \end{cases}$$

Este es un contraste de tipo f2 y el estadístico del contraste, bajo la hipótesis nula es:

$$t_{exp} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{(n_x-1)S_x^2 + (n_y-1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_x} + \dfrac{1}{n_y}}}$$

De los datos necesarios, sólo nos falta calcular la media muestral de $Y$ a partir de los datos proporcionados:

$$\overline{y} = \frac{\sum y_i}{n_y} = \frac{135}{10} = 13.5$$

Luego

$$t_{exp} = \frac{17.1 - 13.5}{\sqrt{\frac{(10-1)4.767 + (10-1)2.0556}{10+10-2}}\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = 4.3585$$

$$t_{n_x+n_y-2,\alpha} = t_{10+10-2,0.05} = 1.734$$

Como $t_{exp} > t_{n_x+n_y-2,\alpha}$, según los datos obtenidos, hay evidencias para rechazar la hipótesis nula al nivel de significación del 5 %, es decir, podemos admitir que el salario medio pagado a los hombres es superior al de las mujeres según los datos.

**6.** Sean $X$ = n de etiquetas colocadas en 5 minutos por el grupo 1 (antiguas) $\sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y$ = n de etiquetas colocadas en 5 minutos por el grupo 2 (nuevas) $\sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y)$.

Para responder a la cuestión planteada vamos a realizar un contraste de hipótesis para ver si $\mu_y > \mu_x$, con varianzas desconocidas y con un nivel de significación del 5 %.

$$\begin{cases} H_0 \equiv \mu_x \geq \mu_y \\ H_1 \equiv \mu_x < \mu_y \end{cases}$$

Dicho contraste sólo sabemos hacerlo en el caso en que las varianzas de las dos poblaciones bajo estudio sean iguales. Luego, en primer lugar, debería contrastar si las varianzas, según los datos, puedo aceptar que son iguales. Para ello realizamos el contraste:

$$\begin{cases} H_0 \equiv \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \\ H_1 \equiv \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2 \end{cases}$$

Este es un contraste de tipo h1 y el estadístico del contraste, bajo la hipótesis nula es:

$$F_{exp} = \frac{S_x^2}{S_y^2}$$

Calculemos los coeficientes necesarios para obtener el estadístico de contraste a partir de los datos proporcionados:

$$S_x^2 = \frac{1}{n_x - 1}\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n_x}\right) = \frac{1}{8}\left(735879 - \frac{(2567)^2}{9}\right) = 464.1944$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n_y - 1}\left(\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n_y}\right) = \frac{1}{8}\left(806149 - \frac{(2691)^2}{9}\right) = 192.5$$

Luego

$$
\begin{aligned}
&F_{exp} = \frac{464.1944}{192.5} = 2.4114 \\
&F_{n_x-1,n_y-1,\alpha/2} = F_{8,8,0.025} = 4.43 \\
&F_{n_x-1,n_y-1,1-\alpha/2} = F_{8,8,0.975} = \frac{1}{F_{8,8,0.025}} = 0.226 \\
&\text{Región de aceptación: } (F_{n_x-1,n_y-1,1-\alpha/2}\,, F_{n_x-1,n_y-1,\alpha/2}) = (0.226\,, 4.43)
\end{aligned}
$$

Como $F_{exp}$ está dentro de la región de aceptación, según los datos obtenidos, no hay evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula al nivel de significación del 5 %, es decir, podemos admitir igualdad de varianzas. Realicemos ahora el otro contraste:

$$
\begin{cases} H_0 \equiv \mu_x \geq \mu_y \\ H_1 \equiv \mu_x < \mu_y \end{cases}
$$

Este es un contraste de tipo f3 y el estadístico del contraste, bajo la hipótesis nula es:

$$
t_{exp} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{(n_x-1)S_x^2 + (n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_x} + \dfrac{1}{n_y}}}
$$

De los datos necesarios, sólo nos faltan calcular la media muestral de $X$ e $Y$ a partir de los datos proporcionados:

$$
\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\sum x_i}{n_x} = \frac{2567}{9} = 285.52 \\
\overline{y} &= \frac{\sum y_i}{n_y} = \frac{2691}{9} = 299
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
&t_{exp} = \frac{285.52 - 299}{\sqrt{\dfrac{(9-1)464.1944 + (9-1)192.5}{9+9-2}}\sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9}}} = -1.578 \\
&t_{n_x+n_y-2,\alpha} = t_{9+9-2,0.05} = 1.746
\end{aligned}
$$

Como $t_{exp} > -t_{n_x+n_y-2,\alpha}$, según los datos obtenidos, no hay evidencias para rechazar la hipótesis nula al nivel de significación del 5 %, es decir, no podemos afirmar que las nuevas máquinas mejoren la eficacia significativamente.

**7.** Sea $X$ una v.a. que toma el valor 1 cuando la unidad revisada de una cadena de producción es defectuosa y 0 cuando no lo es $\sim \mathcal{B}(1, p)$.

Para responder a la cuestión planteada vamos a realizar un contraste de hipótesis para ver si $p > 0.03$ con un nivel de significación del 1 %:

$$\begin{cases} H_0 \equiv p \leq 0.03 \\ H_1 \equiv p > 0.03 \end{cases}$$

Este es un contraste de tipo a2 para proporciones y el estadístico del contraste, bajo la hipótesis nula es:

$$z_{exp} = \frac{\widehat{p} - 0.03}{\sqrt{\dfrac{0.03(1-0.03)}{n}}}$$

De los datos necesarios, el enunciado nos aporta que $n = 300$ y sólo nos falta calcular $\widehat{p}$ a partir de los datos proporcionados:

$$\widehat{p} = \frac{17}{300} = 0.05667$$

Luego

$$z_{exp} = \frac{0.05667 - 0.03}{\sqrt{\dfrac{0.03(1-0.03)}{300}}} = 2.7076$$

$$z_\alpha = z_{0.01} = 2.33$$

Como $z_{exp} > z_\alpha$, según los datos obtenidos, debemos rechazar la hipótesis nula al nivel de significación del 1 %, es decir, según los datos debería revisarse el sistema.

**8.** Sean $X$ una v.a. que toma el valor 1 si la persona del nuevo mercado es favorable al yogurt más líquido y 0 en caso contrario $\sim \mathcal{B}(1, p_x)$ e $Y$ una v.a. que toma el valor 1 si la persona del antiguo mercado es favorable al yogurt más líquido y 0 en caso contrario $\sim \mathcal{B}(1, p_y)$

Para responder a la cuestión planteada vamos a realizar un contraste de hipótesis para ver si $p_x < p_y$ con un nivel de significación del 1 %:

$$\begin{cases} H_0 \equiv p_x \geq p_y \\ H_1 \equiv p_x < p_y \end{cases}$$

Este es un contraste de tipo b3 para proporciones y el estadístico del contraste, bajo la hipótesis nula es:

$$z_{exp} = \frac{\widehat{p}_x - \widehat{p}_y}{\sqrt{\dfrac{n_x + n_y}{n_x \cdot n_y}\,\widehat{p}(1-\widehat{p})}}$$

$$\text{donde } \widehat{p} = \frac{n_x\widehat{p}_x + n_y\widehat{p}_y}{n_x + n_y}$$

De los datos necesarios, el enunciado nos aporta que $n_x = 500$, $n_y = 300$ y sólo nos falta calcular a partir de los datos proporcionados:

$$\widehat{p}_x = \frac{280}{500} = 0.56$$
$$\widehat{p}_y = \frac{230}{300} = 0.767$$
$$\widehat{p} = \frac{500 \cdot 0.56 + 300 \cdot 0.767}{800} = 0.6375$$

Luego

$$z_{exp} = \frac{0.56 - 0.767}{\sqrt{\frac{500+300}{500 \cdot 300} 0.6375(1 - 0.6375)}} = -5.9817$$
$$z_\alpha = z_{0.01} = 2.33$$

Como $z_{exp} < -z_\alpha$, según los datos obtenidos, debemos rechazar la hipótesis nula al nivel de significación del 1 %, es decir, los datos indican que el porcentaje de aceptación de los yogures en el mercado actual supera al nuevo mercado.