Soluciones de la relación del Tema 10.

1. Se nos pide un intervalo de confianza para μ con varianza conocida, luego debemos calcular:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\overline{x} + z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El enunciado nos aporta la siguiente información: $n = 25$, $\sigma^2 = 28$, $\overline{x} = 81.2$ y $1-\alpha = 0.95$, luego $\sigma = 9$, $z_{\alpha/2} = 1.96$ y el intervalo pedido es:

$$\left(81.2 - 1.96\,\frac{9}{\sqrt{25}}\,,81.2 + 1.96\,\frac{9}{\sqrt{25}}\right) = (77.672, 84.728)$$

2. Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, 4)$. Se nos pide calcular n de forma que $(\overline{x} - 1\,,\overline{x} + 1)$ sea un intervalo de confianza para μ al nivel de confianza $1-\alpha = 0.9$. Recordemos que el intervalo de confianza óptimo para un nivel de confianza dado viene dado por:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\overline{x} + z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Comparemos el intervalo de confianza que da el problema y el óptimo para los datos del problema:

$$(\overline{x} - 1\,,\overline{x} + 1)$$
$$\left(\overline{x} - 1.645\,\frac{4}{\sqrt{n}}\,,\overline{x} + 1.645\,\frac{4}{\sqrt{n}}\right)$$

Igualando cualquiera de los dos extremos de los intervalos, y teniendo en cuenta que el valor del óptimo siempre será menor o igual que el del otro intervalo, llegamos a que

$$1.645\,\frac{4}{\sqrt{n}} \leq 1 \Rightarrow 1.645 \cdot 4 \leq \sqrt{n} \Rightarrow (1.645 \cdot 4)^2 \leq n \Rightarrow 43.2964 \leq n$$

Luego el menor tamaño para que el intervalo dado sea un intervalo de confianza para μ al nivel de confianza al 0.9 n es 44.

3. Se nos pide un intervalo de confianza para σ^2 con media conocida, luego debemos calcular:

$$\left(\frac{\sum(x_i - \mu)^2}{\chi^2_{n,\alpha/2}}\,,\frac{\sum(x_i - \mu)^2}{\chi^2_{n,1-\alpha/2}}\right)$$

El enunciado nos aporta la siguiente información: $n = 12$, $\mu = 3$ y $1-\alpha = 0.99$, luego $\chi^2_{12,0.005} = 28.3$, $\chi^2_{12,0.995} = 3.07$ y calculamos $\sum(x_i - \mu)^2 = 0.0058$. El intervalo pedido es:

$$\left(\frac{0.0058}{28.3}\,,\frac{0.0058}{3.07}\right) = (0.000205, 0.001886)$$

4. Se nos pide un intervalo de confianza para σ^2 con media desconocida, luego debemos calcular:

$$\left(\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\,,\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right)$$

El enunciado nos aporta la siguiente información: $n=7$ y $1-\alpha=0.95$, luego $\chi^2_{6,0.025}=14.4$, $\chi^2_{6,0.975}=1.24$ y calculamos $\overline{x}=4.4$ y $\sum(x_i-\overline{x})^2=20.98$. El intervalo pedido es:

$$\left(\frac{20.98}{14.4}\,,\frac{20.98}{1.24}\right)=(1.457,16.92)$$

5. Se nos pide un intervalo de confianza para la diferencias de medias $\mu_x-\mu_y$ con varianza desconocida pero iguales, luego debemos calcular:

$$\left(\overline{x}-\overline{y}-t_{n_x+n_y-2,\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n_x}\frac{1}{n_y}}\,S_p\,,\overline{x}-\overline{y}+t_{n_x+n_y-2,\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n_x}\frac{1}{n_y}}\,S_p\right)$$

El enunciado nos aporta la siguiente información: $n_x=n_y=7$, $\overline{x}=4.8$, $\overline{y}=5.4$, $S_x^2=8.38$, $S_y^2=7.62$ y $1-\alpha=0.95$, luego $t_{12,0.025}=2.179$ y podemos calcular $S_p^2=\dfrac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}=8$. El intervalo pedido es:

$$\left(4.8-5.4-2.179\sqrt{\frac{1}{7}\frac{1}{7}}\sqrt{8}\,,4.8-5.4+2.179\sqrt{\frac{1}{7}\frac{1}{7}}\sqrt{8}\right)=(-1.48045\,,0.28045)$$

6. Se nos pide un intervalo de confianza para el cociente de varianzas σ_y^2/σ_x^2 con medias desconocida, luego debemos calcular:

$$\left(F_{n_x-1,n_y-1,1-\alpha/2}\,\frac{S_y^2}{S_x^2}\,,F_{n_x-1,n_y-1,\alpha/2}\,\frac{S_y^2}{S_x^2}\right)$$

El enunciado nos aporta la siguiente información: $n_x=10$ $n_y=14$ y $1-\alpha=0.9$, luego $F_{9,13,0.05}=2.71$, $F_{9,13,0.95}=1/F_{13,9,0.05}=0.32$ y podemos calcular $\overline{x}=16150$, $\overline{y}=15400$ $S_x^2=10538888.889$ y $S_y^2=1352307.69$. El intervalo pedido es:

$$\left(0.32\,\frac{1352307.69}{10538888.889}\,,2.71\,\frac{1352307.69}{10538888.889}\right)=(0.4106\,,4.4772)$$

7. Se nos pide calcular el menor n de forma que al estimar la proporción de fumadores que estarían dispuestos a consumir un nuevo tipo de cigarrillos más bajos en nicotina el error sea inferior a 0.03 al nivel de confianza $1-\alpha=0.99$. Recordemos que el error verifica la siguiente desigualdad

$$\varepsilon\leq z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}$$

Recordemos que queremos que el error verifique $\varepsilon \leq 0.03$, luego se debe cumplir:

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} \leq 0.03$$

con $z_{0.005} = 0.575$, y $\widehat{p} = 0.5$. Despejando de la desigualdad:

$$z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})}}{\sqrt{n}} \leq 0.03 \Rightarrow \frac{0.2875}{\sqrt{n}} \leq 0.03 \Rightarrow \sqrt{n} \geq \frac{0.2875}{0.03} = 9.5833 \Rightarrow n \geq 91.84$$

Luego el número mínimo de fumadores que se deben elegir son 92.

8. Se nos pide calcular el menor n de forma que al estimar la diferencia en la intención de voto entre los dos principales partidos políticos de un país el error sea inferior a 0.01 al nivel de confianza $1 - \alpha = 0.95$. El error, en dicho caso, como el problema nos indica es la diferencia entre los dos extremos del intervalo de confianza para la diferencia de proporciones:

$$\varepsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_1)}{n} + \frac{\widehat{p}_2(1-\widehat{p}_2)}{n}}$$

Recordemos que queremos que el error verifique $\varepsilon < 0.01$, luego se debe cumplir:

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_1)}{n} + \frac{\widehat{p}_2(1-\widehat{p}_2)}{n}} < 0.01$$

con $z_{0.025} = 1.96$, y $\widehat{p}_1 = P\widehat{p}_2 = 0.5$. Despejando de la desigualdad:

$$z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_1) + \widehat{p}_2(1-\widehat{p}_2)}}{\sqrt{n}} < 0.01 \Rightarrow \frac{1.38593}{\sqrt{n}} < 0.01 \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{1.38593}{0.01} = 138.593$$

$$\Rightarrow n > 19208.01965$$

Luego se deben entrevistar al menos 19209 personas.