

Ejercicios de Análisis Matemático I

Relación 2: Funciones reales de variable real. Continuidad y límite funcional

1. Dése un ejemplo de función ...
 - a) continua cuya imagen no es un intervalo.
 - b) no continua en un intervalo y cuya imagen es un intervalo.
 - c) continua en \mathbb{R} , no constante y cuya imagen sea un intervalo acotado.
 - d) continua en $[0, 1[$ cuya imagen no es acotada.
 - e) continua en un intervalo abierto acotado cuya imagen es un intervalo cerrado y acotado.
2. Pruébese que todo polinomio de grado impar admite al menos una raíz real.
3. Sean $P, Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones polinómicas. Estudiar el comportamiento en $+\infty$ y $-\infty$ de la función racional $\frac{P}{Q}$.
4. Sea P un polinomio de grado n tal que el término independiente y el coeficiente líder tienen signo opuesto. Pruébese que P tiene al menos una raíz positiva.
5. Probar que existe un número real positivo x tal que

$$\ln x + \sqrt{x} = 0.$$

6. Probar que la ecuación $\operatorname{tg} x = x$ tiene infinitas soluciones.

7. Probar que la ecuación

$$x + e^x + \operatorname{arctg} x = 0$$

tiene una sola raíz real. Dar un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

8. Estúdiese la continuidad y el comportamiento en $+\infty$ y en $-\infty$ de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

a) $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[5]{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

9. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Estúdiese la continuidad de f y su comportamiento en el punto 1, en $+\infty$ y en $-\infty$.

10. Sea $f :]0, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \left(\frac{1}{\tan x}\right)^{\sin x}, \quad \forall x \in]0, \pi/2[.$$

Probar que f tiene límite en 0 y $\pi/2$ y calcular dichos límites.

11. Sea $f :]0, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (1 + \sin x)^{\cot x}, \quad \forall x \in]0, \pi/2[.$$

Estudiar el comportamiento de f en 0 y $\pi/2$.

12. Sea $f : \mathbb{R}^+ \setminus \{e\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^{\frac{1}{\ln x - 1}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}.$$

Estudiar el comportamiento de f en 0, e y $+\infty$.

13. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua en $[0, 1]$. Pruébese que f tiene un punto fijo, es decir, que existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

14. Suponiendo que la temperatura varía de manera continua a lo largo del Ecuador, pruébese que, en cualquier instante, existen dos puntos antípodas sobre el Ecuador que se hallan a la misma temperatura.

15. Un escalador comienza, desde su campamento base, a subir a una montaña el Sábado a las 7 horas, alcanzando la cima a las 8 de la tarde. A las 7 horas del Domingo inicia el descenso hacia el campamento base tardando el mismo tiempo que le costó la subida. Demostrar que existe una determinada hora, a lo largo del Domingo, en la que el escalador se encuentra exactamente a la misma altura que a esa misma hora del Sábado.

16. Un corredor recorre 6 Km. en 30 minutos. Pruébese que existe un intervalo de 5 minutos a lo largo del cual el corredor recorre exactamente 1 kilómetro.