ANALISIS MATEMATICO I

Práctica de *Mathematica* . Teorema del punto fijo de Banach

Curso 2004-05

El objetivo de esta práctica es dar aproximaciones de puntos fijos de funciones contractivas. Usaremos para ello el Teorema del punto fijo de Banach, el Teorema del valor medio y algunos comandos de *Mathematica* , que recordamos a continuación.

Gráfica de una función de una variable.

In[1]:=
```
Plot[función,{variable,origen,extremo},opciones]
```
Por ejemplo:

In[2]:=
```
Plot[Tan[x],{x,0,4*Pi}]
```

Opción de color de la gráfica (si añadimos esto al ejemplo anterior, la gráfica sería roja):

In[3]:=
```
PlotStyle->{RGBColor[1,0,0]}
```

Bucles:

In[4]:=
```
For[inicio,fin,variación del índice,orden a
ejecutar]
```
Por ejemplo:

In[5]:=
```
S=0;
For[i=1,i<=5,i=i+1,S=S+i;Print[S]]
```

Escribir en pantalla.

In[6]:=
```
Print[A,B,C]
```
Out[6]=
```
ABC
```

In[7]:=
```
Print["La solución es",x]
```
Out[7]=

La solución es x

Condición para que se ejecute una orden.

In[8]:=
```
If[condición,orden en caso afirmativo,orden en caso
negativo]
```
Ejemplo concreto:

In[9]:=
```
If[1>2,Print["milagro"],Print["menos mal"]]
```

Además usaremos el Teorema del punto fijo de Banach, que nos asegura:

Teorema.
Sea (E, d) *un espacio métrico completo y sea* $f : E \to E$ *una función contractiva. Entonces existe un único punto* a *de* E *fijo por* f*, es decir, tal que* $f(a) = a$*.*

De hecho, dado a_0 *en* E*, la sucesión* $\{a_n\}$ *definida mediante la expresión*

$$a_{n+1} := f(a_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

es convergente al punto fijo a *y, además si* $0 \leq k < 1$ *es tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq k \, d(x, y), \ \forall x, y \in E, \tag{1}$$

entonces se verifica las desigualdad:

$$d(a_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} \, d(a_1, a_0), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

De hecho, si la aplicación f no es constante, la aproximación al punto fijo es cada vez mejor. Necesitaremos una estimación de la constante k para acotar el error. En el caso de que $E \subset \mathbb{R}^N$ y f sea derivable se obtiene:

a) Si E es un intervalo de $\mathbb{R}$, acotando la derivada de f en I (sin intervención del *Mathematica*).

b) Si $E \subset \mathbb{R}^2$ es un convexo (una bola, cuadrado, etc.), se calcula la matriz jacobiana de f, y una cota superior de la norma euclídea de la matriz jacobiana es también un mayorante de la constante de Lipschitz de f.

EJERCICIOS.

Ejercicio 1.
Sea la función $f(x) = 1 + \arctan(x)\ \ (x \geq 1)$.

i) Usando como punto de inicio $a_0 = 1$, hacer un programa que calcule el término a_7 de la sucesión que aparece en el Teorema del punto fijo de Banach. (Has de evaluar primero $f(1), f(f(1)), f^3(1), \ldots, f^7(1)$).

ii) Dibujar la función anterior cerca de la solución aproximada que se ha obtenido.

iii) Mejorar el programa que se ha hecho en el apartado i) para que escriba todos los términos $a_i\ (1 \leq i \leq n)$ de forma que la distancia de a_n al punto fijo sea menor que 10^{-2}. (Antes necesitarás obtener la constante k y pedir al programa que se pare cuando el error del término n-ésimo sea menor que 10^{-2}).

Ejercicio 2.
Repetir el trabajo de los apartados i) y iii) para la función $f : C \longrightarrow C$ dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(\text{sen}\, x \,\text{sen}\, y, \frac{(x^2+y^2)}{4} + \frac{3}{2}\right), \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

donde $C = [-1,1] \times [-1,1]$, tomando como punto de inicio $(1,1)$.