Métodos Matemáticos para la Física II

Examen-Primer parcial

8 de febrero de 2006

Ejercicio 1.

a) Estudiar para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la siguiente desigualdad:

$$\frac{2x-1}{x-2} < x+4.$$

b) Sea A el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{2} + y^2 \leqslant 1, \ y > 0 \right\}.$$

Obténgase el interior, la frontera y la adherencia del conjunto A, e indíquese si A es abierto, cerrado o compacto.

Ejercicio 2.

a) Estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n + n^2}{n!} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n} - \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

b) ¿Cuántas soluciones reales positivas tiene la ecuación $3\log x - x = 0$? Justificad la respuesta.

Ejercicio 3. Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ejercicio 4. Calcúlense los extremos absolutos y relativos de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2 - y + 1 \qquad (x,y) \in A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{2} + y^2 \leqslant 1, \ y \geqslant 0 \right\}.$$

Ejercicio 5. Compruébese que la ecuación $x^2 + xy^2 + x + y + y^2 - 1 = 0$ define implícitamente a la variable y como función de x en un entorno del punto (-1,1). Calculad $y'(-1)$. ¿Alcanza $y(x)$ un extremo relativo en -1?

Observación: Todos los ejercicios se valorarán por igual.