Examen Métodos Matemáticos para la física II

Primer parcial

1. Estúdiese la continuidad, derivabilidad, intervalos de monotonía y extremos relativos y absolutos de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in \mathbb{R}$, por
$$f(x) = |x^2 - 1||x + 2|.$$

2. a) Las palomas domésticas no suelen volar sobre extensiones grandes de agua a menos que se vean forzadas a ello, posiblemente porque se requiera más energía para mantener la altitud sobre el agua fría. Supongamos que se suelta una paloma desde un barco situado a 3 km de la costa, siendo A el punto costero más cercano. El palomar se encuentra en un punto de la costa situado a 10 km de A. Si la paloma gasta dos veces más energía volando sobre el agua que sobre la tierra firme y sigue un camino que hace mínima la energía gastada, determínese el punto dónde la paloma abandona el agua.

   b) Pruébese la siguiente desigualdad para todo $x \geq 0$:
$$\arctan(x) \geq \frac{x}{1 + x^2} \ .$$

3. Estúdiese la diferenciabilidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

4. Calcúlense los extremos de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ en cada uno de los casos siguientes:

   a) $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ y $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0\}$

   b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$ y $A = \mathbb{R}^2$.

5. Probar que la ecuación $y^3 + x^2 y = 10$ define implícitamente a y como función de x, $y = f(x)$, en un entorno del punto $(3, 1)$ y calcúlese
$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - 1 + (x - 3)/2}{(x - 3)^2},$$
donde f es la función definida por la ecuación anterior.

En Granada a 9 de febrero de 2005