Primer parcial de Análisis Matemático I, 2^0 Matemáticas.

Curso 2006-2007

1. Tema:

2. Sea $f : \overline{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ un campo vectorial continuo. Supongamos que $f(0) = 0$ y que f es derivable en $B(0,1)$ con $\|Df(x)\| \leq \|f(x)\|,\ \forall x \in B(0,1)$. Probar que

$$f(x) = 0,\ \forall x \in \overline{B}(0,1).$$

Indicación: Utilizar el Teorema del valor medio para probar que

$$\|f(x)\| \leq \|x\| \text{ Sup } \{\|f(y)\| :\ y \in [0,x]\}.$$

Utilizar ahora la propiedad de compacidad para probar la existencia de $y_1 \in [0,x]$ tal que

$$\|f(x)\| \leq \|x\|\ \|f(y_1)\|.$$

Iterar el proceso.

3. Considerar el espacio vectorial X dado por

$$X := \{f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} :\ \exists a,b,c \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos x + bx + cx^2,\ \forall x \in [-1,1]\},$$

en el que definimos la aplicación $\|\ \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|f\| = |a| + |b| + |c|, \quad \text{siendo} \quad f(x) = a\cos x + bx + cx^2,\ \forall x \in [-1,1].$$

i) Probar que X es un espacio vectorial de dimensión 3 y que $\|\ \|$ es una norma en X.

ii) +Es completo el espacio normado $(X, \|\cdot\|)$?

iii) Probar que la convergencia asociada a la norma anterior coincide con la convergencia uniforme en $[-1,1]$.

Indicación: Para probar que las funciones de $[-1,1]$ en $\mathbb{R}$

$$x \ \longmapsto\ \cos x\ ,\ x\ \longmapsto\ x\ , x\ \longmapsto\ x^2$$

son linealmente independientes evalúese en 0 una combinación lineal nula de ellas y procédase igual con la derivada primera de dicha combinación.

4. a) Probar que para toda función $f \in C[0,1]$, la aplicación

$$x \mapsto \operatorname{sen} x + \int_0^1 \frac{f(y)}{e^{x+y+1}}\ dy \quad (x \in [0,1])$$

es continua (de hecho, es lipschitziana).

b) Probar que el operador $T : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ definido por por

$$T(f)(x) = \operatorname{sen} x + \int_0^1 \frac{f(y)}{e^{x+y+1}}\ dy,\ \forall f \in C[0,1],\ \forall x \in [0,1]$$

es una aplicación contractiva con constante menor o igual que $\dfrac{e-1}{e^2}$

c) Deducir que existe una única función $f \in C[0,1]$ que verifica

$$f(x) = \operatorname{sen} x + \int_0^1 \frac{f(y)}{e^{x+y+1}}\, dy, \quad \forall x \in [0,1].$$

5. Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ verificando

$$\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Probar que f es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^N$ sobre $\mathbb{R}^N$.

Indicación: Utilizar la desigualdad para probar que

a) f es inyectiva.

b) $f(\mathbb{R}^N)$ es cerrado (usar la complitud de $\mathbb{R}^N$)

c) $Df(x) \in Iso(\mathbb{R}^N), \ \forall x \in \mathbb{R}^N$ (basta comprobar que dichas aplicaciones lineales son inyectivas).

Deducir que

d) f es un difeomorfismo local.

e) f es abierta

f) $f(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N$ (utilizar b) y e)).

Granada, 16 de febrero de 2007

Segundo parcial de Análisis Matemático I, 2^0 Matemáticas.

Curso 2006-2007

1. Tema:

2. Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y justificar la respuesta con un resultado (para verdaderas) o con un contraejemplo (para falsas).

   a) Si E es un conjunto medible (Lebesgue) de $\mathbb{R}^N$, entonces
   $$\lambda(E) = \sup\{\lambda(O) : O \subset E, \quad O \text{ abierto}\}$$

   b) Si E es un conjunto medible (Lebesgue) de $\mathbb{R}^N$, entonces
   $$\lambda(E) = \text{ínf}\{\lambda(O) : E \subset O, O \text{ abierto en } \mathbb{R}^N\}$$

   c) Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones integrables tal que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f, entonces f es integrable y además $\{\int_\Omega f_n \, d\mu\}$ converge a $\int_\Omega f \, d\mu$.

   d) Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene primitiva (F), entonces

   f es integrable $\Leftrightarrow$ F tiene límites reales en los extremos de I.

3. Probar que para cualesquiera reales positivos a y b, se verifica que
$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}.$$
Indicación: Desarrollar en serie y utilizar el teorema de la convergencia absoluta.

4. **a)** Probar que está bien definida la función $F :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por
$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-tx}}{x \, e^x} \, dx \qquad (t > -1).$$
   b) Probar que F es derivable en $]-1, +\infty[$, calcular su derivada y obtener una expresión explícita de la función F.
   Indicación: Utilizar el teorema de derivación de funciones definidas por integrales.

5. Probar que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} \, dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} \frac{d(x,y)}{(1+yx^2)(1+y)} = \frac{\pi^2}{4}.$$
Indicación: Utilizar los teoremas de Tonelli y Fubini, y la igualdad válida c.p.d. en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$
$$\frac{1}{(1+yx^2)(1+y)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1+yx^2}\right)$$

Granada, 22 de junio de 2007

Final de Análisis Matemático I, 2^0 Matemáticas.
Curso 2006-2007

1. Tema:

2. Considerar el espacio vectorial X dado por
$$X := \{f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} : \ \exists a, b, c \in \mathbb{R}, \ f(x) = a \operatorname{sen} x + bx + cx^2, \ \forall x \in [-1,1]\},$$
y la aplicación $\| \ \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$\|f\| = |a| + |b| + |c|, \quad \text{siendo} \quad f(x) = a \operatorname{sen} x + bx + cx^2, \ \forall x \in [-1,1].$$
   i) Probar que X es un espacio vectorial de dimensión 3 y que $\| \ \|$ es una norma en X.
   ii) ¿Es completo el espacio normado $(X, \| \cdot \|)$?
   iii) Probar que la convergencia asociada a la norma anterior coincide con la convergencia uniforme en $[-1,1]$.

   Indicación: Para probar que las funciones de $[-1,1]$ en $\mathbb{R}$
$$x \longmapsto \operatorname{sen} x \ , \ x \longmapsto x \ , x \longmapsto x^2$$
   son linealmente independientes, úsese que las dos primeras derivadas de una combinación lineal nula de las funciones anteriores, ha de ser nula.

3. Probar que si K es un subconjunto compacto de un espacio métrico y $\{f_n\}$ una sucesión monótona de funciones continuas de K en $\mathbb{R}$ que converge puntualmente en K a una función continua f, entonces la convergencia es uniforme en K (Teorema de Dini).

   Indicación: Fíjese $\varepsilon > 0$. Para cada natural n defínase
$$U_n := \{x \in K : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$
   Probar que $\{U_n\}$ es un recubrimiento por abiertos relativos de K. Por último utilícese el axioma de Heine-Borel.

4. Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y justificar la respuesta con un resultado (para verdaderas) o con un contraejemplo (para falsas).

   a) Si E es un conjunto medible (Lebesgue) de $\mathbb{R}^N$, entonces
$$\lambda(E) = \text{ínf}\{\lambda(K) : E \subset K, \quad K \text{ compacto}\}$$

   b) Si E es un conjunto medible (Lebesgue) de $\mathbb{R}^N$, entonces
$$\lambda(E) = \text{ínf}\{\lambda(K) : E \subset O, \quad K \text{ abierto}\}$$

   c) Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones integrables tal que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f, entonces f es integrable y además $\{\int_\Omega f_n \, d\mu\}$ converge a $\int_\Omega f \, d\mu$.

   d) Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ tiene primitiva (F), entonces f es integrable $\Leftrightarrow$ F tiene límites reales en los extremos de I.

5. **a)** Probar que está bien definida la función $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x}\, dx, \;\; \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

b) Probar que F es derivable en $\mathbb{R}^+$ y dar una expresión explícita de la función F.
Indicación: Utilizar el teorema de derivación de funciones definidas por integrales.

Granada, 6 de julio de 2007