Primer parcial de Análisis Matemático I, 2^0 Matemáticas.

Curso 2005-2006

1. Tema: Teorema de la función implícita.

2. Considerar el espacio vectorial X dado por

   $X := \{f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} : \ \exists a,b,c,d \in \mathbb{R},\ f(x) = a \operatorname{sen} x + b\cos x + cx + dx^2,\ \forall x \in [-1,1]\}$,

   en el que definimos la función $\| \ \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

   $$\|f\| = |a| + |b| + |c| + |d|, \quad \text{siendo} \quad f(x) = a \operatorname{sen} x + b\cos x + cx + dx^2,\ \forall x \in [-1,1].$$

   i) Probar que X es un espacio vectorial de dimensión 4 y que $\| \ \|$ es una norma en X.
   ii) ¿Es completo el espacio normado $(X\ ,\ \|\cdot\|)$?
   iii) Probar que la convergencia asociada a la norma anterior coincide con la convergencia uniforme en $[-1,1]$.

   Indicación: Para probar que las funciones de $[-1,1]$ en $\mathbb{R}$

   $$x \ \longmapsto \ \operatorname{sen} x \ , \ x \ \longmapsto \ \cos x \ , \ x \ \longmapsto \ x \ , x \ \longmapsto \ x^2$$

   son linealmente independientes evalúese en 0 una combinación lineal nula de ellas y procédase igual con las sucesivas derivadas de dicha combinación.

3. Probar que si K es un subconjunto compacto de un espacio métrico y $\{f_n\}$ una sucesión monótona de funciones continuas de K en $\mathbb{R}$ que converge puntualmente en K a una función continua f, entonces la convergencia es uniforme en K (Teorema de Dini).

   Indicación: Fíjese $\varepsilon > 0$. Para cada natural n defínase

   $$U_n := \{x \in K : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

   Probar que $\{U_n\}$ es un recubrimiento por abiertos relativos de K. Por último utilícese el axioma de Heine-Borel.

4. Probar que la ecuación $f(x,y) = 4(x,y)$ tiene una única solución

   $$(x,y) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right],$$

   siendo f la función dada por

   $$f(x,y) = (x + \tan x, y + 1 + \cos x) \qquad \left((x,y) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right).$$

5. Probar que existen dos abiertos A y B de $\mathbb{R}^2$ conteniendo el punto $(0,1)$ y que existe un difeomorfismo f de clase $\mathcal{C}^\infty$ de A sobre B tales que

   $$\left.\begin{array}{r} x^3 f_1(x,y) + y^2 f_2(x,y)^3 = 1 \\ xy^2 + 2f_1(x,y)f_2(x,y) = 0 \end{array}\right\} \forall (x,y) \in A.$$

   Calcular $J_{f^{-1}}(0,1)$.

Granada, 1 de febrero de 2006

Soluciones (primer parcial de Análisis Matemático I, 2^0 Matemáticas).

Curso 2005-2006

2. i) Basta probar que la única combinación nula

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x + cx + dx^2 = 0, \ \forall x \in [-1, 1],$$

es la trivial. En efecto evaluando en cero tenemos que $b = 0$; después evaluando en cero la tercera derivada obtenemos que $a = 0$; ahora evaluando en cero la derivada segunda se sigue $d = 0$; finalmente es claro que $c = 0$.
Por tanto, X es un subespacio vectorial (de $C[-1, 1]$, por ejemplo), de dimensión 4. Como la aplicación $T : X \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(f) = (a, b, c, d), \text{ donde } \ f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x + cx + dx^2, \ \forall x \in [-1, 1],$$

es un isomorfismo lineal que verifica

$$\|Tf\|_1 = \|f\|,$$

se concluye que $\| \ \|$ es una norma en X.

ii) X es completo por ser isométrico a $(\mathbb{R}^4, \| \ \|_1)$, de hecho es sabido que todo espacio normado de dimensión finita es completo.

iii) La convergencia asociada a $\| \ \|_\infty$ en $C[-1, 1]$ coincide con la convergencia uniforme en $[-1, 1]$. Igual ocurre con la restricción a X de $\| \ \|_\infty$. Por último, el Teorema de Hausdorff nos garantiza que dos normas cualesquiera de X son equivalentes y, por tanto, las convergencias asociadas a ambas normas coinciden.

3. Ver los apuntes.

4. Basta probar que la función $g : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(x, y) = \frac{f}{4} = \frac{1}{4}(x + \tan x, y + 1 + \cos x) \qquad \left(x, y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right)$$

tiene un punto fijo.

Como el dominio es convexo y g es derivable, podemos aplicar el Teorema del valor medio en el interior del dominio. Para ello calculamos el jacobiano de g en un punto

$$J_g(x, y) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{1}{\cos^2 x} & 0 \\ & \\ -\operatorname{sen} x & 1 \end{pmatrix}$$

Al ser $\dfrac{1}{\cos^2 x} \leq 2$, $\left(x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right)$, se tiene que el cuadrado de la norma euclídea de la matriz jacobiana de g es menor que $\dfrac{3^2 + 1 + 1}{16} = \dfrac{11}{16} < 1$. El Teorema práctico del valor medio nos asegura que g es contractiva (con constante menor que $\dfrac{\sqrt{11}}{4}$).

Además, el dominio de g es un cerrado de $\mathbb{R}^2$, luego completo. Si comprobamos que g deja invariante $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\times\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$, bastará aplicar el Teorema del punto fijo de Banach para probar que hay un único punto fijo de g, esto es,

$$\exists_1(x,y)\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\times\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right] : f(x,y)=4(x,y).$$

Veamos que g deja invariante $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\times\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. En efecto, si $x,y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$, tenemos que

$$\frac{1}{4}|x+\tan x|\leq\frac{1}{4}\Big(\frac{\pi}{4}+1\Big)=\frac{\pi}{16}+\frac{4}{16}\leq\frac{\pi}{16}+\frac{2\pi}{16}<\frac{\pi}{4}$$

y

$$\frac{1}{4}|y+1+\cos x|<\frac{1}{4}\Big(\frac{\pi}{4}+2\Big)=\frac{\pi}{16}+\frac{8}{16}\leq\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{16}=\frac{\pi}{4}\ .$$

5. Consideremos la función $F:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x,y,u,v)=(x^3u+y^2v^3-1\ ,\ xy^2+2uv),\ \forall(x,y,u,v)\in\mathbb{R}^4.$$

F es de clase $\mathcal{C}^\infty$, $F(0,1,0,1)=(0,0)$ y

$$J_F(x,y,u,v)=\begin{pmatrix}3x^2u & 2yv^3 & x^3 & 3y^2v^2\\ y^2 & 2xy & 2v & 2u\end{pmatrix},\ \forall(x,y,u,v)\in\mathbb{R}^4.$$

Así

$$J_F(0,1,0,1)=\begin{pmatrix}0&2&0&3\\1&0&2&0\end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix}0&3\\2&0\end{vmatrix}=-6\neq0$, el Teorema de la función implícita nos asegura que existen un abierto Ω de $\mathbb{R}^4$ conteniendo el punto $(0,1,0,1)$, un abierto U de $\mathbb{R}^2$ conteniendo el punto $(0,1)$ y una función $f:U\to\mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^\infty$, tales que

$$\{(x,y,u,v)\in\Omega : F(x,y,u,v)=(0,0)\}=\{(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) : (x,y)\in U\}.$$

En particular $F(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y))=0,\ \forall(x,y)\in U$, esto es,

$$\left.\begin{array}{r}x^3f_1(x,y)+y^2f_2(x,y)^3=1\\ xy^2+2f_1(x,y)f_2(x,y)=0\end{array}\right\}\forall(x,y)\in U.$$

Evaluando el sistema anterior en el punto $(0,1)$ se tiene que $f(0,1)=(0,1)$. Además

$$J_f(0,1)=-\begin{pmatrix}0&3\\2&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{2}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\neq0$, aplicando el Teorema de la función inversa a $f:A\to\mathbb{R}^2$ en $(0,1)$, nos garantiza la existencia de un abierto A de $\mathbb{R}^2$ con $(0,1)\in A\subset U$ tal que $B:=f(A)$ es abierto (que contiene el punto $(0,1)=f(0,1)$) y un difeomorfismo f de clase $\mathcal{C}^\infty$ de A sobre B . Además

$$J_{f^{-1}}(0,1)=J_f(0,1)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

Granada, 1 de febrero de 2006

Segundo parcial de Análisis Matemático I, 2^0 Matemáticas.

Curso 2005-2006

1. Resumen de la construcción de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$. Probar
   - Que la medida exterior de un intervalo acotado coincide con su volumen.
   - La caracterización de la medida de Lebesgue.

2. Sea $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Probar que f es integrable si, y sólo si, el conjunto
$$\left\{ \int_s^t |f(x)| \, dx : \ \alpha < s < t < \beta \right\}$$
está acotado. En caso afirmativo
$$\int_\alpha^\beta f(x) \, dx = \lim \int_{s_n}^{t_n} f(x) \, dx$$
para cualesquiera sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ en $]\alpha, \beta[$, verificando que $s_n < t_n$ para cada natural n y
$$\{s_n\} \searrow \alpha \quad , \quad \{t_n\} \nearrow \beta.$$

3. *a*) Probar que para cada $t > -1$, la función
$$x \longmapsto \frac{1 - e^{-tx}}{x \ e^x}$$
es integrable en $\mathbb{R}^+$.

   b) Considerar la función $F :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por
$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-tx}}{x \ e^x} \, dx.$$
Probar que F es derivable en $]-1, +\infty[$, calcular su derivada y obtener una expresióin explícita de la función F.

   <u>Indicación:</u> Utilizar el teorema de derivación de funciones definidas por integrales.

4. Probar que si $1 < \alpha < 2$, entonces la función
$$(x, y) \longmapsto \frac{\operatorname{sen} x \ \operatorname{sen} y}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$
es integrable en $\mathbb{R}^2$.

5. Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Demostrar
   a) Que es integrable la función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = f(x - y)g(y)$.

   b) Que se puede definir c.p.d. en $\mathbb{R}$ la función $f * g$ dada por
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)g(y) \, dy$$
y esta función también es integrable.

   c) Que es cierta la siguiente desigualdad $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \ \|g\|_1$.

Granada, 13 de junio de 2006

Soluciones (segundo parcial de Análisis Matemático I, 2^0 Matemáticas).
Curso 2005-2006

2. Sea

$$M := \sup \left\{ \int_s^t |f(x)|dx : \ \alpha < s < t < \beta \right\} \in [0, \infty].$$

Si f es integrable, entonces

$$\int_s^t |f(x)|dx \leq \int_\alpha^\beta \ |f(x)| \ dx \ (\alpha < s < t < \beta)$$

y en consecuencia $M \in \mathbb{R}$.

Recíprocamente supongamos $M \in \mathbb{R}$, consideremos $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ sucesiones en $]\alpha, \beta[$ con

$$s_n < t_n \text{ para cada natural } n \ \text{ y } \ \{s_n\} \searrow \alpha, \ \{t_n\} \nearrow \beta \ .$$

Para cada natural n definimos la función $f_n = |f| \ \chi_{[s_n, t_n]}$. Como $\{f_n\} \nearrow |f|$ y la sucesión $\left\{\int f_n\right\}$ esta acotada, la versión práctica del teorema de la convergencia monótona nos asegura que $|f| \in \mathcal{L}^1(]\alpha, \beta[)$, y en consecuencia, al ser f medible, también $f \in \mathcal{L}^1(]\alpha, \beta[)$. Finalmente sean $\{s_n\}, \{t_n\}$ como en el enunciado, consideremos para cada natural n la función $g_n = f\chi_{]s_n, t_n[}$, es claro que la sucesión $\{g_n\} \to f$, así, en virtud del teorema de la convergencia dominada , concluimos que

$$\int_\alpha^\beta f(x) \ dx = \lim \int_{s_n}^{t_n} f(x) \ dx \ .$$

3. *a*) Como para $t \in]-1, +\infty[$ se verifica que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{-tx}}{xe^x} = \lim_{x \to 0} \frac{te^{-tx}}{e^x + xe^x} = t,$$

y la función no tiene problema de integrabilidad en $]0, 1]$. Es claro que

$$\frac{1}{xe^x} \in \mathcal{L}^1[1, +\infty[)$$

así como que

$$t \in]-1, +\infty[\Longrightarrow e^{-(1+t)x} \in \mathcal{L}^1([1, +\infty[) \ ,$$

basta, en consecuencia, tener en cuenta que

$$1 \leq x \Longrightarrow \frac{e^{-tx}}{xe^x} \leq e^{-(1+t)x}$$

para probar el apartado a).

b) Acabamos de verificar que la función

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-tx}}{xe^x} \ dx, \ \forall t \in]-1, +\infty[\ ,$$

está bien definida. Se tiene también que

$$\frac{\partial \left(\dfrac{1 - e^{-tx}}{xe^x} \right)}{\partial t} = e^{-(1+t)x} \ , \forall t \in]-1, +\infty[, \forall x \in \mathbb{R}^+ \ .$$

Para probar que la función F es derivable, sea $t_0 \in]-1,+\infty[$. Tomemos $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $-1 < \alpha < t_0$. Queremos aplicar el teorema de derivación de funciones definidas por integrales a la restricción de la función F al intervalo $]\alpha,+\infty[\times\mathbb{R}^+$, para ello tenemos que acotar $e^{-(1+t)x}$ por una función integrable. Es claro que para $t \in]\alpha,+\infty[$ se verifica que

$$0 < e^{-(1+t)x} \leq e^{-(1+\alpha)x} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+),$$

y en consecuencia, en virtud del citado teorema y del carácter local de la derivabilidad, la función F es derivable con

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-(1+t)x} = \left[-\frac{e^{-(1+t)x}}{1+t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+t}\ ,\ \forall t \in]-1,+\infty[.$$

Hemos probando que $F'(t) = \dfrac{1}{1+t}$ de donde concluimos que $F(t) = \lg(1+t) + C$ y, evaluando la función en el 0, que

$$F(t) = \lg(1+t),\ \forall t \in]-1,+\infty[.$$

4. Notemos

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen} x\ \operatorname{sen} y}{(x^2+y^2)^\alpha},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

La aditividad de la integral respecto el recinto de integración nos asegura que

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2) \Longleftrightarrow f \in \mathcal{L}^1(B(0,1)) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2 \setminus B(0,1))\ .$$

Si hacemos la mayoración

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

no llegamos a nada pues

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2).$$

Sin embargo esta mayoración es buena para trabajar en $\mathbb{R}^2 \setminus B(0,1)$. En efecto,

$$1 < \alpha \Longleftrightarrow \rho^{1-2\alpha} \in \mathcal{L}^1(]1,+\infty[) \Longleftrightarrow \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2 \setminus B(0,1))$$

$$\Longrightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2 \setminus B(0,1)).$$

Para trabajar en $B(0,1)$ hay que afinar más y utilizar la acotación

$$|\operatorname{sen} x| \leq |x|\ \ ,\ \ |\operatorname{sen} y| \leq |y|.$$

En efecto,

$$\alpha < 2 \Longleftrightarrow \rho^{3-2\alpha} \in \mathcal{L}^1(]0,1[) \Longleftrightarrow \frac{|x|\ |y|}{(x^2+y^2)^\alpha} \in \mathcal{L}^1(B(0,1))$$

$$\Longrightarrow f \in \mathcal{L}^1(B(0,1)).$$

En ambos casos se han utilizado la fórmula de cambio de variable para coordenadas polares, la integrabilidad de las funciones potenciales, el criterio de integrabilidad y que toda función medible acotada por una integrable es integrable.

5. Sean
$$f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad \text{ y } \quad h(x,y) = f(x-y)g(y), \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Se tiene

a)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)| \ dx \right] \ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \ |g(y)| \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)| \ dx \right] \ dy \ =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ |g(y)| \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \ dt \right] \ dy \ = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \ |f(y)| \ dy \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| \ dx \right) \in \mathbb{R},$$
lo que nos asegura, en virtud del criterio de integrabilidad, que $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$.

b) Ambas afirmaciones son literalmente el teorema de Fubini.

c)
$$\|f * g\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |(f*g)(x)| \ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy \right| dx \leq$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)||g(y)|dy \right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)||g(y)|dx \right] dy = \|f\|_1 \|g\|_1,$$

donde se han utilizado el teorema de Fubini y los cálculos del apartado a).

Granada, 13 de junio de 2006

Final de Análisis Matemático I, 2^0 Matemáticas.

Curso 2005-2006

1. Tema: Teorema de la función implícita

2. Probar que si K es un subconjunto compacto de un espacio métrico y $\{f_n\}$ una sucesión monótona de funciones continuas de K en $\mathbb{R}$ que converge puntualmente en K a una función continua f, entonces la convergencia es uniforme en K (Teorema de Dini).

   Indicación: Fíjese $\varepsilon > 0$. Para cada natural n defínase
   $$U_n := \{x \in K : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$
   Probar que $\{U_n\}$ es un recubrimiento por abiertos relativos de K. Por último utilícese el axioma de Heine-Borel.

3. Probar que existen dos abiertos A y B de $\mathbb{R}^2$ conteniendo el punto $(0,1)$ y que existe un difeomorfismo f de clase $\mathcal{C}^\infty$ de A sobre B tales que
   $$\left.\begin{array}{l} x^3 f_1(x,y) + y^2 f_2(x,y)^3 = 1 \\ xy^2 + 2 f_1(x,y) f_2(x,y) = 0 \end{array}\right\} \forall (x,y) \in A.$$
   Calcular $J_{f^{-1}}(0,1)$.

4. Probar que
   $$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} .$$

5. Probar que la función
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x = 0 \\ x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2x}\right) & \text{si } \ x \in]0,1] \end{cases}$$
   a) es uniformemente continua.
   b) no es absolutamente continua.

   Indicación: Para *b*) considerar los subintervalos disjuntos de $[0,1]$ de la forma
   $$I_k = [a_k, b_k] = \left[\frac{1}{4k+1}, \frac{1}{4k}\right] .$$

Granada, 28 de junio de 2006

Final (junio) de Análisis I, 2^0 Matemáticas, Curso 2005-2006
Soluciones

2. Ver apuntes.

3. Consideremos la función $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y, u, v) = (x^3u + y^2v^3 - 1 \ , \ xy^2 + 2uv), \ \forall(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4.$$

F es de clase $\mathcal{C}^\infty$, $F(0, 1, 0, 1) = (0, 0)$ y

$$J_F(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} 3x^2u & 2yv^3 & x^3 & 3y^2v^2 \\ y^2 & 2xy & 2v & 2u \end{pmatrix}, \ \forall(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4.$$

Así

$$J_F(0, 1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, el Teorema de la función implícita nos asegura que existen un abierto Ω de $\mathbb{R}^4$ conteniendo el punto $(0, 1, 0, 1)$, un abierto U de $\mathbb{R}^2$ conteniendo el punto $(0, 1)$ y una función $f : U \to \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^\infty$, tales que

$$\{(x, y, u, v) \in \Omega : F(x, y, u, v) = (0, 0)\} = \{(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) : (x, y) \in U\}.$$

En particular $F(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) = 0, \ \forall(x, y) \in U$, esto es,

$$\left.\begin{array}{r} x^3f_1(x, y) + y^2f_2(x, y)^3 = 1 \\ xy^2 + 2f_1(x, y)f_2(x, y) = 0 \end{array}\right\} \forall(x, y) \in U.$$

Evaluando el sistema anterior en el punto $(0, 1)$ se tiene que $f(0, 1) = (0, 1)$. Además

$$J_f(0, 1) = -\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{3} \neq 0$, aplicando el Teorema de la función inversa a $f : A \to \mathbb{R}^2$ en $(0, 1)$, nos garantiza la existencia de un abierto A de $\mathbb{R}^2$ con $(0, 1) \in A \subset U$ tal que $B := f(A)$ es abierto (que contiene el punto $(0, 1) = f(0, 1)$) y un difeomorfismo f de clase $\mathcal{C}^\infty$ de A sobre B. Además

$$J_{f^{-1}}(0, 1) = J_f(0, 1)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

4. Para $x > 0$ se tiene

$$\frac{x}{1 + e^x} = \frac{x}{e^x} \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{x}{e^x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-nx} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x e^{-(n+1)x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x e^{-nx}.$$

Aplicaremos el teorema de la convergencia absoluta a la sucesión de funciones integrables

$$f_n(x) = (-1)^{n+1} x e^{-nx}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Integrando por partes, calculamos

$$\int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} x e^{-nx}\, dx = \frac{1}{n^2}.$$

Por tanto, al ser la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ convergente, se puede aplicar el teorema de la convergencia absoluta, obteniéndose así que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} .$$

5. *a*) La función f es claramente continua y está definida en un compacto, luego, en virtud del teorema de Heine es uniformemente continua.

b) La función f no es absolutamente continua, en efecto sea $\delta > 0$. Tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{4n_0} < \delta$. Consideremos los subintervalos disjuntos del intervalo $[0,1]$

$$I_k = [a_k, b_k] = \left[\frac{1}{4k+1}, \frac{1}{4k}\right], \; k = n_0 \; , \; n_0 + 1 \; , \; \ldots \; , n_0 + n \; .$$

Es claro que

$$\sum_{k=n_0}^{n_0+n} \ell(I_k) < \delta \; ,$$

mientras que

$$\sum_{k=n_0}^{n_0+n} |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=n_0}^{n_0+n} \frac{1}{4k+1} > \frac{1}{4} \sum_{k=n_0}^{n_0+n} \frac{1}{k+1} > 1$$

si n es suficientemente grande pues la serie

$$\sum_{k\geq n_0} \frac{1}{k+1}$$

es divergente.

Granada, 28 de junio de 2006

Examen de septiembre de Análisis Matemático I, 2^0 Matemáticas.

Curso 2005-2006

1. Tema :

2. Considerar el espacio vectorial X dado por

   $X := \{f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} : \ \exists a,b,c,d \in \mathbb{R}, \ f(x) = a \operatorname{sen} x + b\cos x + cx + dx^2, \ \forall x \in [-1,1]\}$,

   en el que definimos la función $\| \ \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

   $$\|f\| = |a| + |b| + |c| + |d|, \quad \text{siendo} \quad f(x) = a \operatorname{sen} x + b\cos x + cx + dx^2, \ \forall x \in [-1,1].$$

   i) Probar que X es un espacio vectorial de dimensión 4 y que $\| \ \|$ es una norma en X.
   ii) ¿Es completo el espacio normado $(X \ , \ \| \cdot \|)$?
   iii) Probar que la convergencia asociada a la norma anterior coincide con la convergencia uniforme en $[-1,1]$.

   <u>Indicación</u>: Para probar que las funciones de $[-1,1]$ en $\mathbb{R}$

   $$x \ \longmapsto \ \operatorname{sen} x \ , \ x \ \longmapsto \ \cos x \ , \ x \ \longmapsto \ x \ , x \ \longmapsto \ x^2$$

   son linealmente independientes evalúese en 0 una combinación lineal nula de ellas y procédase igual con las sucesivas derivadas de dicha combinación.

3. Probar que la ecuación $f(x,y) = 4(x,y)$ tiene una única solución

   $$(x,y) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right],$$

   siendo f la función dada por

   $$f(x,y) = (x + \tan x, y + 1 + \cos x) \qquad \left((x,y) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right) .$$

4. Probar que

   $$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} .$$

5. Probar que si $1 < \alpha < 2$, entonces la función

   $$(x,y) \longmapsto \frac{\operatorname{sen} x \ \operatorname{sen} y}{(x^2+y^2)^{\alpha}}$$

   es integrable en $\mathbb{R}^2$.

Granada, 4 de septiembre de 2006

Soluciones (examen de septiembre de Análisis Matemático I, 2^0 Matemáticas).

Curso 2005-2006

2. i) Basta probar que la única combinación nula

$$a \operatorname{sen} x + b\cos x + cx + dx^2 = 0,\ \forall x \in [-1,1],$$

es la trivial. En efecto, evaluando en cero tenemos que $b=0$; después evaluando en cero la tercera derivada obtenemos que $a=0$; ahora evaluando en cero la derivada segunda se sigue $d=0$; finalmente es claro que $c=0$.
Por tanto, X es un subespacio vectorial (de $C[-1,1]$, por ejemplo), de dimensión 4. Como la aplicación $T : X \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(f) = (a,b,c,d),\ \text{donde}\ \ f(x) = a\operatorname{sen} x + b\cos x + cx + dx^2,\ \forall x \in [-1,1],$$

es un isomorfismo lineal que verifica

$$\|Tf\|_1 = \|f\|,$$

se concluye que $\|\ \|$ es una norma en X.

ii) X es completo por ser isométrico a $(\mathbb{R}^4, \|\ \|_1)$, de hecho es sabido que todo espacio normado de dimensión finita es completo.

iii) La convergencia asociada a $\|\ \|_\infty$ en $C[-1,1]$ coincide con la convergencia uniforme en $[-1,1]$. Por tanto, lo mismo ocurre con la restricción a X de $\|\ \|_\infty$. Por último, el Teorema de Hausdorff nos garantiza que dos normas cualesquiera de X son equivalentes y, por tanto, las convergencias asociadas a ambas normas coinciden.

3. Basta probar que la función $g : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(x,y) = \frac{f}{4} = \frac{1}{4}(x + \tan x, y + 1 + \cos x) \qquad \left(x, y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right)$$

tiene un punto fijo.

Como el dominio es convexo y g es derivable, podemos aplicar el Teorema del valor medio en el interior del dominio. Para ello calculamos el jacobiano de g en un punto

$$J_g(x,y) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 + \dfrac{1}{\cos^2 x} & 0 \\ & \\ -\operatorname{sen} x & 1 \end{pmatrix}$$

Al ser $\dfrac{1}{\cos^2 x} \le 2$, $\left(x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right)$, se tiene que el cuadrado de la norma euclídea de la matriz jacobiana de g es menor que $\dfrac{3^2+1+1}{16} = \dfrac{11}{16} < 1$. El Teorema práctico del valor medio nos asegura que g es contractiva (con constante menor que $\dfrac{\sqrt{11}}{4}$).

Además, el dominio de g es un cerrado de $\mathbb{R}^2$, luego completo. Si comprobamos que g deja invariante $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\times\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$, bastará aplicar el Teorema del punto fijo de Banach para probar que hay un único punto fijo de g, esto es,

$$\exists_1 (x,y)\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\times\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right] : f(x,y)=4(x,y).$$

Veamos que g deja invariante $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\times\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. En efecto, si $x,y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$, tenemos que

$$\frac{1}{4}|x+\tan x|\leq\frac{1}{4}\Big(\frac{\pi}{4}+1\Big)=\frac{\pi}{16}+\frac{4}{16}\leq\frac{\pi}{16}+\frac{2\pi}{16}<\frac{\pi}{4}$$

y

$$\frac{1}{4}|y+1+\cos x|<\frac{1}{4}\Big(\frac{\pi}{4}+2\Big)=\frac{\pi}{16}+\frac{8}{16}\leq\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{16}=\frac{\pi}{4}\ .$$

5. Notemos

$$f(x,y)=\frac{\operatorname{sen}x\ \operatorname{sen}y}{(x^2+y^2)^\alpha},\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

La aditividad de la integral respecto el recinto de integración nos asegura que

$$f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)\Longleftrightarrow f\in\mathcal{L}^1(B(0,1))\cap\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2\setminus B(0,1))\ .$$

Si hacemos la mayoración

$$|f(x,y)|\leq\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

no llegamos a nada pues

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\notin\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2).$$

Sin embargo, esta mayoración es buena para trabajar en $\mathbb{R}^2\setminus B(0,1)$. En efecto,

$$1<\alpha\Longleftrightarrow\rho^{1-2\alpha}\in\mathcal{L}^1(]1,+\infty[)\Longleftrightarrow\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2\setminus B(0,1))$$

$$\Longrightarrow f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2\setminus B(0,1)).$$

Para trabajar en $B(0,1)$ hay que afinar más y utilizar la acotación

$$|\operatorname{sen}x|\leq|x|\quad,\quad|\operatorname{sen}y|\leq|y|.$$

En efecto,

$$\alpha<2\Longleftrightarrow\rho^{3-2\alpha}\in\mathcal{L}^1(]0,1[)\Longleftrightarrow\frac{|x|\ |y|}{(x^2+y^2)^\alpha}\in\mathcal{L}^1(B(0,1))$$

$$\Longrightarrow f\in\mathcal{L}^1(B(0,1)).$$

En ambos casos se han utilizado la fórmula de cambio de variable para coordenadas polares, la integrabilidad de las funciones potenciales, el criterio de integrabilidad y que toda función medible acotada por una integrable es integrable.

Granada, 4 de septiembre de 2006