Primer parcial de Análisis Matemático I, 2^0 Matemáticas.

Curso 2004-2005

1. Tema 6: El Teorema del punto fijo de Banach y consecuencias: Teoremas de Schauder y de Picard-Lindelöf.

2. Sea K un compacto no vacío de $\mathbb{R}$.

   a) Probar que $K \times K$ es un compacto de $\mathbb{R}^2$.

   b) Probar que existen $x, y \in K$ verificando

   $$|x - y| = \text{ diam } K := \sup\{|w - z| : w, z \in K\} \ .$$

3. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden 3 asociada a un operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, esto es,

   $$(T(x, y, z))^t = A(x, y, z)^t, \qquad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$

   Consideramos en $\mathbb{R}^3$ la norma $\| \ \|_\infty$, probar que

   $$\|T\| = \max_i \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}|$$

4. Consideramos el espacio X dado por

   $$X := \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : \ \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ f(x) = a \operatorname{sen} \ x + b \cos x + cx + dx^2, \ \forall x \in [0, 1]\},$$

   en el que definimos la función $\| \ \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

   $$\|f\| = |a| + |b| + |c| + |d|, \quad \text{siendo} \ \ f(x) = a \operatorname{sen} \ x + b \cos x + cx + dx^2, \ \forall x \in [0, 1] \ .$$

   i) Pruébese que X es un espacio vectorial de dimensión 4 y que $\| \ \|$ es una norma en X.

   ii) ¿Es completo el espacio X?

   iii) Pruébese que la convergencia asociada a la norma anterior coincide con la convergencia uniforme sobre $[0, 1]$.

5. Pruébese que la ecuación $f(x, y) = 4(x, y)$ tiene una única solución

   $$(x, y) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right],$$

   siendo f la función dada por

   $$f(x, y) = (x + \tan x, y + 1 + \cos x) \qquad \left((x, y) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right) \ .$$

Granada, 4 de febrero de 2005

Soluciones (primer parcial de Análisis Matemático I, 2^0 Matemáticas).

Curso 2004-2005

2. a) Por ser K compacto, está acotado, por tanto

$$\exists M : |x| \leq M, \qquad \forall x \in K.$$

Es inmediato comprobar que

$$\|(x,y)\|_\infty \leq M, \qquad \forall (x,y) \in K \times K \ .$$

por tanto K es acotado. Para comprobar que K es cerrado, si $\{(x_n, y_n)\}$ es una sucesión en $K \times K$ convergente a $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $\{x_n\} \to x, \{y_n\} \to y$, y por ser K cerrado, ha de verificarse que $x, y \in K$, por tanto $K \times K$ es cerrado, luego, compacto.

b) La función distancia en un espacio métrico es continua, por tanto, por el Teorema de compacidad ha de alcanzar el máximo en el compacto $K \times K$.

3. Si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ y $\|(x,y,z)\|_\infty \leq 1$, entonces

$$T(x,y,z) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z);$$

por tanto,

$$|a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z| \leq |a_{11}| + |a_{12}| + |a_{13}|.$$

Usando la misma acotación con la segunda y la tercera coordenada, se tiene que

$$\|T(x,y,z)\|_\infty \leq \max\{|a_{i1}| + |a_{i2}| + |a_{i3}| : 1 \leq i \leq 3\}$$

Para cada i fijo, si evaluamos en el vector de la esfera $s = (s_1, s_2, s_3)$, donde $s_j = 1$ si $a_{ij} \geq 0$ y $s_j = -1$ en otro caso, tenemos que, por estar s en la esfera unidad para la norma $\| \ \|_\infty$, tenemos que

$$\|T\| \geq \|T(s)\|_\infty \geq |a_{i1}| + |a_{i2}| + |a_{i3}| \ .$$

Tomando máximo en i y uniendo las dos desigualdades, hemos probado la fórmula propuesta para la norma del operador.

4. i) Para probar que las funciones

$$f_1(x) = \text{sen } x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = x, \quad f_4(x) = x^2, \qquad (x \in [0,1]),$$

son linealmente independientes, basta suponer que una cierta combinación lineal

$$af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = 0,$$

y evaluando en cero, tendremos que $b = 0$; después derivando tres veces obtendremos que $a = 0$ y, teniendo en cuenta esta igualdad y evaluando las derivada segunda, obtenemos que $d = 0$, de donde $c = 0$.

Por tanto, X es un subespacio vectorial (de $C[0,1]$, por ejemplo), de dimensión 4. Como la aplicación $T : X \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(f) = (a,b,c,d), \text{ donde } \quad f = af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4,$$

es un isomorfismo lineal y verifica que

$$\|Tf\|_1 = \|f\|,$$

entonces $\| \ \|$ es una norma en X.

ii) X es completo por ser isométrico a $(\mathbb{R}^4, \| \ \|_1)$, de hecho todo espacio normado de dimensión finita es completo.

iii) La convergencia asociada a $\| \ \|_\infty$ en $C[0,1]$ coincide con la convergencia uniforme sobre $[0,1]$. Igual ocurre con la restricción a X de $\| \ \|_\infty$. Por último, el Teorema de Hausdorff nos garantiza que dos normas cualesquiera de X son equivalentes y, por tanto, la convergencias asociadas a ambas normas coinciden.

5. Basta definir la función $g : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(x,y) = \frac{f}{4} = \frac{1}{4}(x + \tan x, y + 1 + \cos x) \qquad \left(x, y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right) .$$

Como el dominio es convexo y g es diferenciable, podemos aplicar el Teorema del valor medio en el interior del dominio. Para ello calculamos el jacobiano de g en un punto

$$J_g(x,y) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{1}{\cos^2 x} & 0 \\ & \\ -\operatorname{sen}\ x & 1 \end{pmatrix}$$

Al ser $\dfrac{1}{\cos^2 x} \leq 2$, $\left(x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right)$, se tiene que el cuadrado de la norma euclídea de la matriz jacobiana de g es menor que $\dfrac{3^2 + 1 + 1}{16} = \frac{11}{16} < 1$. El Teorema práctico del valor medio nos asegura que g es contractiva (con constante $\dfrac{\sqrt{11}}{4}$).

Además, el dominio de g es un cerrado de $\mathbb{R}^2$, luego completo y si comprobamos que g deja invariante $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, bastará aplicar el Teorema del punto fijo de Banach.

En efecto, si $x, y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, tenemos que

$$\frac{1}{4}|x + \tan x| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) = \frac{\pi}{16} + \frac{4}{16} \leq \frac{\pi}{16} + \frac{2\pi}{16} < \frac{\pi}{4}$$

y

$$\frac{1}{4}|y + 1 + \cos x| < \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} + 2\right) = \frac{\pi}{16} + \frac{8}{16} \leq \frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{4} .$$

Granada, 4 de febrero de 2005

Segundo parcial de Análisis Matemático I, 2^0 Matemáticas.

Curso 2004-2005

1. Tema : Teorema de la función implícita.

2. a) Demostrar que existe un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ con $(0,0) \in U$ y existe una función $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tales que
$$\varphi(0,0) = 1 \quad , \quad xy\varphi(x,y) - e^{\varphi(x,y)} + e = 0, \ \forall (x,y) \in U \ .$$
   b) Comprobar que dicha función φ no alcanza un extremo relativo en $(0,0)$.
   c) Se considera la función $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por
$$f(x,y) = (\varphi(x,y) + y, x), \ \forall (x,y) \in U.$$
   Demostrar que f es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^\infty$ de un entorno de $(0,0)$ sobre un entorno de $(1,0)$. Calcular $J_{f^{-1}}(1,0)$.

3. Sea
$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 8 = 0\} \ .$$
   a) Probar que M es una variedad diferenciable en $\mathbb{R}^2$ de dimensión 1 .
   b) Probar que dicha variedad es compacta.
   c) Calcular la distancia máxima y mínima del origen a la variedad.

4. Estudiar la integrabilidad de las siguientes funciones en los conjuntos que se indican:
   a) $e^{-(x+y)}$ sen (xy) en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.
   b) $\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$ en $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 > 1\}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

5. Probar que
$$\lim \int_0^{+\infty} \frac{1 - x\ e^{-nx}}{1+x^2}\ dx = \frac{\pi}{2} \ .$$

Granada, 23 de junio de 2005

Segundo parcial de Análisis I, 2^0 Matemáticas, Curso 2004-2005
Soluciones

1. Tema: Teorema de la función implícita.

2. a) Consideremos la función $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x,y,z) = xyz - e^z + e \ , \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ .$$

$F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, $F(0,0,1) = 0$ y

$$J_F(x,y,z) = \nabla F(x,y,z) = (yz, xz, xy - e^z) \ , \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ .$$

Por tanto $J_F(0,0,1) = (0,0,-e)$, de donde F satisface las hipótesis del Teorema de la función implícita, y se justifica la existencia de U y φ verificando el apartado a).

b) Derivando respecto de la variable x y de la variable y en la igualdad

$$xy\varphi(x,y) - e^{\varphi(x,y)} + e = 0, \ \forall (x,y) \in U \ ,$$

se tiene:

$$\begin{cases} y\varphi(x,y) + xy\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\ e^{\varphi(x,y)} = 0 \\ x\varphi(x,y) + xy\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)\ e^{\varphi(x,y)} = 0 \end{cases} \quad , \forall (x,y) \in U.$$

Evaluando en $(0,0), (\varphi(0,0) = 1)$, obtenemos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) = 0 \ .$$

Derivando nuevamente obtenemos las derivadas parciales segundas de la función φ en cualquier $(x,y) \in U$

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) + xy\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y)e^{\varphi(x,y)} - \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\right)^2 e^{\varphi(x,y)} = 0 \\ x\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) + x\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) + xy\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y)e^{\varphi(x,y)} - \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)\right)^2 e^{\varphi(x,y)} = 0 \\ \varphi(x,y) + y\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) + x\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) + xy\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x,y) \\ -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}e^{\varphi(x,y)} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)e^{\varphi(x,y)} = 0 \end{cases}$$

.

Evaluando en $(0,0)$, $\left(\varphi(0,0) = 1 \ , \ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) = 0\right)$, obtenemos

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0,0) = 0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0,0) \quad , \quad 1 - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0,0)\ e = 0,$$

de donde

$$H_\varphi(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{e} \\ \dfrac{1}{e} & 0 \end{pmatrix} ,$$

y por tanto φ no alcanza en $(0,0)$ un extremo relativo.

c) La función f es de clase $\mathcal{C}^\infty$, con

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)+1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ,\forall (x,y)\in U,$$

y en consecuencia $J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como $\det\left(J_f(0,0)\right) = -1 \neq 0$, el Teorema de la función inversa nos asegura que existen dos abiertos A, B de $\mathbb{R}^2$ con $(0,0)\in A\subset U$ y $(1,0)\in B\subset\mathbb{R}^2$ tales que la función f es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^\infty$ de A sobre B.

Por último

$$J_{f^{-1}}(1,0) = \left(J_f(0,0)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

3. a) Sea

$$g(x,y) = 5x^2+5y^2-6xy-8 \ ,\forall (x,y)\in G := \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} .$$

Dicha función es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y

$$J_g(x,y) = \nabla g(x,y) = (10x-6y, 10y-6x) \ ,\forall (x,y)\in G .$$

Así, rango $J_g(x,y) = 1$,$\forall (x,y)\in G\supset M$, y, por tanto, M es una variedad diferenciable en $\mathbb{R}^2$ de dimensión 1 .

b) Considerando la función g definida en <u>todo</u> $\mathbb{R}^2$ es claro que $M = g^{-1}(\{0\})$, con lo que M es un cerrado de $\mathbb{R}^2$. Si $(x,y)\in M$, entonces

$$8 = 5x^2+5y^2-6xy = 2x^2+2y^2+3(x-y)^2 \geq 2x^2+2y^2.$$

Por tanto, $\|(x,y)\|_2 \leq 2, \forall (x,y)\in M$ y M es un conjunto acotado.

c) Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2+y^2$,$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$. $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ y se trata de calcular los extremos de f condicionados por la variedad M. Como f es continua y M es compacta, dichos extremos condicionados existen.

Utilizaremos para el cálculo de los mismos la función de Lagrange $L: G\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$L(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(5x^2+5y^2-6xy-8) .$$

El sistema de Lagrange es:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x+10\lambda x-6\lambda y = 0 \Longleftrightarrow x+\lambda(5x-3y) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y+10\lambda y-6\lambda x = 0 \Longleftrightarrow y+\lambda(5y-3x) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 5x^2+5y^2-6xy-8 = 0 \end{cases} .$$

Es claro que si $\lambda = 0$, entonces $x = y = 0$, lo que contradice la tercera ecuación. Por tanto $\lambda\neq 0$. Si $x = 0$, como $\lambda\neq 0$, se tiene que $y = 0$ lo que contradice la tercera ecuación. Análogamente, si $y = 0$ se sigue $x = 0$. De hecho $(0,0)\notin G$. Por tanto, $x\neq 0, y\neq 0, \lambda\neq 0$.

Despejando $-\frac{1}{\lambda}$ en las dos primeras ecuaciones se tiene

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{5x-3y}{x} = \frac{5y-3x}{y},$$

de donde $y^2 = x^2$, o lo que es igual $|y| = |x|$.
Si y=x, entonces $\lambda = -\frac{1}{2}$, $4x^2 - 8 = 0$ y tenemos las soluciones:

$$\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad , \quad \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right) \ .$$

Si y=-x, entonces $\lambda = -\frac{1}{8}$, $16x^2 - 8 = 0$ y tenemos las soluciones:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{8}\right) \quad , \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{8}\right) \ .$$

Como

$$f\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = f\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = 4$$

y

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$$

se tiene que la máxima distancia del origen a la variedad M es 2 y la mínima es 1. Obsérvese que M no es más que una elipse de semiejes 1 y 2.

4. a) Como $|f(x,y)| \leq e^{-(x+y)}$,$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, y f es medible por ser continua, la integrabilidad de f en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ se reduce a la integrabilidad de

$$g(x,y) = e^{-(x+y)}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \ .$$

Los Teoremas de Tonelli y Fubini nos aseguran que la integrabilidad de g equivale a la existencia de alguna de las integrales iteradas de $|g(x,y)| = g(x,y)$.

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-(x+y)} dx\right] dy = \int_0^{+\infty} -e^{-(x+y)}\Big]_{x=0}^{x=+\infty} dy = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = -e^{-y}\Big]_{y=0}^{y=+\infty} = 1 \ ,$$

donde se ha utilizado la regla de Barrow. Por tanto f es integrable en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

b) Como f es continua, entonces f es medible y en virtud del Teorema del cambio de variable, la integrabilidad de f en A equivale a la integrabilidad de

$$\frac{\rho^2 \cos\ \varphi}{\rho^{2\alpha}} \quad \text{en} \quad]1, +\infty[\times] - \pi, \pi[\times\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ ,$$

donde se ha utilizado el cambio a coordenadas esféricas $\begin{cases} x = \rho\ \cos\vartheta \cos\varphi \\ y = \rho\ \text{sen}\ \vartheta \cos\varphi \\ z = \rho\ \text{sen}\ \varphi \end{cases}$, donde el valor absoluto del determinante de la matriz jacobiana del cambio es $\rho^2 \cos\varphi$.
Aplicamos de nuevo los Teoremas de Tonelli y Fubini para estudiar la integrabilidad de la función

$$g(\rho, \vartheta, \varphi) = \frac{\rho^2 \cos\ \varphi}{\rho^{2\alpha}} \ , \forall (\rho, \vartheta, \varphi) \in]1, +\infty[\times] - \pi, \pi[\times\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Una de las integrales iteradas de $|g| = g$ es:

$$\int_1^{+\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2 \cos\ \varphi}{\rho^{2\alpha}} d\varphi \right] d\vartheta \right]\ d\rho = 2\pi \left(\int_1^{+\infty} \rho^{2-2\alpha}\ d\rho \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\ d\varphi \right) =$$

$$4\pi \int_1^{+\infty} \rho^{2-2\alpha}\ d\rho\ .$$

Sabemos que $\rho^{2-2\alpha}$ es integrable en $]1, +\infty]$ si, y sólo si, $2 - 2\alpha < -1$, es decir si, y sólo si, $\alpha > \dfrac{3}{2}$.

Por tanto la función f es integrable en el conjunto A si, y sólo si, $\quad \alpha > \dfrac{3}{2}$.

5. Consideremos la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{1 - x\ e^{-nx}}{1 + x^2}\ , \forall x \in \mathbb{R}^+\ , \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como todas las funciones son continuas, se tiene que son medibles. Si $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}^+$, se tiene

$$|f_n(x)| = \frac{|1 - x\ e^{-nx}|}{1 + x^2} \leq \frac{1 + x\ e^{-x}}{1 + x^2} \leq \frac{2}{1 + x^2}\ .$$

De donde deducimos que cada f_n es integrable en $\mathbb{R}^+$, ya que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg}(x) \Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\ .$$

Como

$$\lim f_n(x) = \frac{1}{1 + x^2}\ , \forall x \in \mathbb{R}^+\ ,$$

podemos aplicar el Teorema de la convergencia dominada para obtener que

$$\lim \int_0^{+\infty} \frac{1 - x\ e^{-nx}}{1 + x^2}\ dx = \frac{\pi}{2}\ .$$

Final de Análisis Matemático I, 2^0 Matemáticas.

Curso 2004-2005

1. Tema :

2. Pruébese que si $(X, \| \cdot \|)$ es un espacio normado de dimensión N, entonces existe una norma $\|| \cdot \||$ en $\mathbb{R}^N$ y una aplicación lineal biyectiva $T : X \to \mathbb{R}^N$ verificando que
$$\|| T(x) \|| = \|x\|, \ \forall x \in X.$$
Dedúzcase que en todo espacio vectorial finito dimensional hay una única topología que procede de una norma.

3. Demostrar que la ecuación
$$f(x, y) = 3(x, y)$$
tiene una única solución $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, donde
$$f(x, y) = (\arctan(x - y), \ \text{sen } x + \cos \ y), \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

4. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ para las cuales
$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

5. Demostrar que
$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ dx}{1 + e^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Granada, 7 de julio de 2005

Final de Análisis Matemático I, 2^0 Matemáticas.

Soluciones.

Curso 2004-2005

1. Tema de teoría.

2. Basta definir T de manera que lleve una base de X en una base de $\mathbb{R}^N$ (la canónica, por ejemplo) y extender por linealidad, esto es para cada $x \in X$ es

$$T(x) = T(x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_Nu_N) = x_1T(u_1) + x_2T(u_2) + \cdots + x_NT(u_N) =$$

$$x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_Ne_N \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_N),$$

que obviamente es una biyección lineal. Luego se define la norma $\|| \cdot \||$ en $\mathbb{R}^N$ por la fórmula

$$\|| y \|| := \|T^{-1}(y)\| \qquad (y \in \mathbb{R}^N)$$

y se comprueba que es una norma (claramente T^{-1} también es lineal). Finalmente se aplica el Teorema de Hausdorff que nos asegura que todas las normas de $\mathbb{R}^N$ son equivalentes de donde se deduce que en X no hay más que una única topología que proceda de una norma.

3. Podemos usar el Teorema del valor medio pues f está definida en todo $\mathbb{R}^2$. Como dicha función es de clase infinito, calculamos la matriz jacobiana, que es,

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+(x-y)^2} & \dfrac{-1}{1+(x-y)^2} \\ \cos x & -sen\ y \end{pmatrix}$$

Para comprobar si la función f es contractiva, basta acotar la norma euclídea de la matriz jacobiana. En esta caso, la norma euclídea al cuadrado coincide con

$$\frac{2}{(1+(x-y)^2)^2} + \cos^2 x + \text{sen }^2 y \leq 4$$

Así, $\dfrac{f}{3}$ es contractiva en virtud del Teorema del valor medio (versión práctica). El dominio de $\dfrac{f}{3}$ es completo ($\mathbb{R}^2$). Podemos aplicar el Teorema del punto fijo de Banach a la función para comprobar que $\dfrac{f}{3}$ tiene un único punto fijo. Es decir la ecuación

$$f(x,y) = 3(x,y)$$

tiene una única solución $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

4. Es claro que la función $g(x,y) = \dfrac{x^3}{6}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ verifica que

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ verificando

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x,y) = f(x,y) - g(x,y) \ ,\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Claramente $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ y $H_\varphi(x,y) = 0 \ ,\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Aplicado ahora la fórmula de Taylor a la función φ en $(0,0)$ se tiene que dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existe $\vartheta \in]0,1[$ tales que

$$\varphi(x,y) = \varphi(0,0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0)\ x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0)\ y + (x,y)H_\varphi(\vartheta x, \vartheta y)(x,y)^t =$$

$$\varphi(0,0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0)\ x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0)\ y \ .$$

Por tanto,

$$f(x,y) = \frac{x^3}{6} + \alpha \ + \beta\ x + \gamma\ y \ ,\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

para convenientes constantes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

5. Para $x > 0$ se tiene

$$\frac{x}{1+e^x} = \frac{x}{e^x}\ \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{x}{e^x}\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-nx} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\ x\ e^{-(n+1)x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\ x\ e^{-nx} \ .$$

Consideramos la sucesión de funciones integrables

$$f_n(x) = (-1)^{n+1}\ x\ e^{-nx} \ ,\forall x \in \mathbb{R}^+ \ ,\forall n \in \mathbb{N}.$$

Integrando por partes, calculamos

$$\int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} x\ e^{-nx}\ dx \begin{cases} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-nx} & v = \frac{-1}{n} e^{-nx} \end{cases} = 0 + \frac{1}{n} \int_0^{\infty} e^{-nx} dx = \frac{1}{n^2}.$$

Por tanto al ser la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

convergente, se puede aplicar el Teorema de la convergencia absoluta para obtener el resultado.

Examen de septiembre de Análisis Matemático I, 2^0 Matemáticas.

Curso 2004-2005

1. Tema

2. Si $a \in \mathbb{R}^*$ es un número fijo, estudiar los extremos relativos y absolutos de la siguiente función:
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)\ .$$

3. Pruébese que existen funciones f, g definidas en un entorno de cero U en $\mathbb{R}^2$ con valores reales y que satisfacen las condiciones
$$f(0,0) = 0, \qquad g(0,0) = 1$$
y las ecuaciones
$$x + 2y + g(x,y) - 1 + 2\arctan f(x,y) = 0, \quad e^{g(x,y)} - e + \operatorname{sen}\ x = 0, \quad \forall (x,y) \in U\ .$$
¿Es la función $(x,y) \mapsto (f(x,y), g(x,y))$ un difeomorfismo en algún entorno de cero en $\mathbb{R}^2$?

4. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f \in \mathcal{L}(\mu)$. Probar que
$$n\ \mu\big(\{\omega \in \Omega:\ |f(\omega)| \geq n\}\big) \longrightarrow 0.$$
Si f no es integrable, ¿es cierto la anterior afirmación para funciones medibles positivas? En caso negativo, dése un contraejemplo.

5. Si a, b son números reales positivos, justificar la siguiente igualdad:
$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+nb)^2} \quad .$$

Granada, 17 de septiembre de 2005

Soluciones examen septiembre 2005, Análisis I

1.

2.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4(x^3-a^2y)=0\\ 4(y^3-a^2x)=0\end{array}\right.$$

Puntos críticos:$A=(0,0); B=(a,a); C=(-a,-a)$

Matriz hessiana:

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}12x^2 & -4a^2\\ -4a^2 & 12y^2\end{pmatrix}$$

Solución: f no alcanza en A un extremo y alcanza en B y C un mínimo relativo estricto.

Extremos absolutos: f no está mayorada ($f(x,0)=x^4,\ \forall x\in\mathbb{R}$), luego no tiene máximo absoluto (también por no tener máximo relativo).

$$f(\rho\cos\vartheta,\rho\,\text{sen }\vartheta)=\rho^4(\cos^4\vartheta+\text{sen }^4\vartheta)-4a^2\rho^2\cos\vartheta\,\text{sen }\vartheta\geq$$
$$\rho^4(\cos^4\vartheta+\text{sen }^4\vartheta)-4a^2\rho^2\geq\rho^2(\rho^2\alpha-4a^2)\ \rightarrow\ +\infty,\ \text{cuando } \rho\ \rightarrow\ +\infty,$$

siendo $\alpha=\text{Min}\{\cos^4\vartheta+\text{sen }^4\vartheta:\ \vartheta\in[0,2\pi]\}>0$.

Sea $R>0$ tal que $\|(x,y)\|>R\Rightarrow\ f(x,y)>1$. La continuidad de f en $\overline{B}((0,0),R)$ nos asegura que f tiene mínimo absoluto en $\overline{B}((0,0),R)$. En consecuencia f tiene mínimo absoluto, que de hecho se alcanza en los puntos B y C.

3. El campo vectorial $F:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ dado por

$$F(x,y,u,v)=\big(x+2y+2\arctan u+v-1,\ \text{sen }\ x+e^v-e\big)\ ,$$

es de clase infinito. Además, se verifica que

$$J_F(x,y,u,v)=\begin{pmatrix}1 & 2 & \frac{2}{1+y^2} & 1\\ \cos x & 0 & 0 & e^v\end{pmatrix}\ ,$$

y $F(0,0,0,1)=0$, por tanto, se cumplen las hipótesis del Teorema de la función implícita en el punto $(0,0,0,1)$. Luego existen un entorno abierto U de $(0,0)$ y un campo escalar $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2):U\rightarrow\mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ verificando

$$\varphi(0,0)=(0,1)\ \text{ y }\ F(x,y,\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y))=(0,0),\ \forall(x,y)\in U.$$

Aplicando el Teorema de la función implícita obtenemos también

$$J_\varphi(0,0)=-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & e\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2e}\begin{pmatrix}e & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=$$
$$\frac{1}{2e}\begin{pmatrix}e-1 & 2e\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

y en consecuencia

$$\det\big(J_\varphi(0,0)\big)=\frac{-4e}{2e}=-2\neq0.$$

Así el campo escalar φ cumple las condiciones del Teorema de la función inversa, lo que nos asegura la existencia de una entorno abierto A de $(0,0)$ contenido en U y un entorno abierto B de $(0,1)$ tales que $\varphi \in \mathrm{Dif}(A,B)$. Por último, el Teorema de la función inversa nos asegura también que

$$J_{\varphi^{-1}}(0,1) = J_\varphi(0,0)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2e \\ 2 & 1-e \end{pmatrix} \ .$$

4. Sea $f \in \mathcal{L}(\mu)$. Para cada natural n sea $A_n := \{\omega \in \Omega : \ |f(\omega)| \geq n\}$. Se tiene que

$$0 \leq n \ \chi_{A_n} \leq |f|, \ \forall n \in \ .$$

Como $\{n \ \chi_{A_n}\} \longrightarrow 0$, el T.C.D. nos asegura que

$$\{n \ \mu(A_n)\} = \left\{ \int_\Omega n \ \chi_{A_n} \ d\mu \right\} \longrightarrow 0 \ .$$

La afirmación anterior no es cierta en general para funciones medibles positivas. Para ello, basta considerar como función f la restricción de la parte entera a $\mathbb{R}^+$, que claramente verifica que $n\mu(A_n) = +\infty, \quad \forall n \quad .$

5. Podemos aplicar el Teorema de la convergencia absoluta. Para ello, desarrollamos en serie de la siguiente forma:

$$\frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}} = xe^{-ax}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nbx} = \sum_{n=0}^{\infty} xe^{-(a+bn)x}.$$

Tomamos la sucesión de funciones

$$f_n(x) = xe^{-(a+bn)x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aplicando el método de integración por partes, obtenemos que

$$\int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} xe^{-(a+bn)x} \ dx = \left[\text{tomando } u = x, v' = e^{-(a+nb)x}\right] = \frac{1}{(a+nb)^2}$$

y teniendo en cuenta que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n|$ es convergente, el Teorema de la convergencia absoluta nos da el resultado que se enunció.