**Primer parcial de Análisis I, $2^0$ Matemáticas.**

Curso 2003-2004

1. Tema 3: Normas equivalentes. Caracterización. Teorema de Hausdorff.

2. 
   a) Pruébese que no existe más espacio normado de dimensión $N$ que $\mathbb{R}^N$ con una conveniente norma. Es decir, si $(X, \|.\|)$ es un espacio normado de dimensión $N$, entonces existe una norma $\|\!| \,.\, |\!\|$ en $\mathbb{R}^N$ y una biyección lineal
   $$T : (X, \|.\|) \to (\mathbb{R}^N, \|\!| \,.\, |\!\|)$$
   isométrica (i.e., $\|\!|\, T(x) \,|\!\| = \|x\|$ para todo $x$ en $X$). Dedúzcase que en todo espacio finito-dimensional hay una única topología que proceda de una norma.

   b) Sea $N$ un número natural y sean $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_N$ números reales distintos. En el espacio vectorial $X$ de todas las funciones polinómicas de grado menor o igual que $N$ definimos:
   $$\|p\| := \sum_{k=0}^{N} |p(\alpha_k)|, \qquad (p \in X).$$
   Probar que una sucesión $\{p_n\}$ en $X$ converge uniformemente en un intervalo $[a, b]$ si existen $N + 1$ números reales distintos del intervalo $[a, b]$, $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_N$, tales que $\{p_n(\alpha_k)\}$ converge para $k = 0, 1, ..., N$.

3. Probar que la función $f$ tiene un único punto fijo en el conjunto $C$, siendo $C$ el conjunto dado por
   $$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| \leq 1\}$$
   y $f : C \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la función dada por
   $$f(x, y) = \frac{1}{4}\big(\text{sen}\,^2 x + 2y, y - x - 1\big) \qquad \big((x, y) \in C\big).$$

4. Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ una función dos veces derivable tal que $D^2 f$ es constante. Probar que existen $b \in \mathbb{R}^M, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ y $S \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ tales que
   $$f(x) = b + T(x) + S(x, x), \qquad \forall x \in A.$$

5. Pruébese que
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\text{sen}\, y} - (1 + xy)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

*Granada, 30 de enero de 2004*

1.

2.

a) Basta definir $T$ de manera que lleve una base de $X$ en una base de $\mathbb{R}^N$ (la canónica, por ejemplo) y extender por linealidad, esto es para cada $x \in X$ es

$$T(x) = T(x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_N u_N) = x_1 T(u_1) + x_2 T(u_2) + \cdots + x_N T(u_N) =$$

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_N e_N \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_N),$$

que obviamente es una biyección lineal. Luego se define la norma $|||\cdot|||$ en $\mathbb{R}^N$ por la fórmula

$$|||\, y \,||| := \|T^{-1}(y)\| \qquad (y \in \mathbb{R}^N)$$

y se comprueba que es una norma (claramente $T^{-1}$ también es lineal). Finalmente se aplica el Teorema de Hausdorff.

b) Basta usar el resultado anterior para la norma del máximo restringida al espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que $N$ (cuya convergencia asociada es la uniforme), y la norma que se define en el enunciado (cuya convergencia asociada es la convergencia puntual sobre los $N+1$ puntos que se fijan).

3. Para empezar, $C$ es convexo y podemos usar el Teorema del valor medio en el interior (la bola abierta unidad para la norma del máximo en $\mathbb{R}^2$). Como la función $f$ es de clase infinito, calculamos la matriz jacobiana, que es,

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} & \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{-1}{4} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Para comprobar que $f$ es contractiva, basta acotar la norma euclídea de la matriz jacobiana. En esta caso, la norma euclídea al cuadrado coincide con

$$\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{10}{16} < 1.$$

Así, $f$ es contractiva en virtud del Teorema del valor medio (versión práctica). El dominio de $f$ es completo (cerrado de $\mathbb{R}^2$, que es completo). Para aplicar el Teorema del punto fijo de Banach resta comprobar que $f$ fija el conjunto $C$. En efecto, si $|x|, |y| \leq 1$, entonces

$$|f_1(x,y)| \leq \frac{1}{4}(1+2) < 1, \qquad |f_2(x,y)| \leq \frac{1}{4}(1+1+1) < 1.$$

4. Por hipótesis, sabemos que $D^2 f$ es constante en $A$, la llamamos $B$, por tanto $B \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$. Fijamos un elemento $a \in A$, llamamos $L = Df(a)$ y definimos el campo vectorial en $A$ dado por

$$g(x) = f(x) - \Big(f(a) + L(x-a) + \frac{1}{2}B(x-a, x-a)\Big) \qquad (x \in A)$$

que toma valores en $\mathbb{R}^M$. Como $f$ es derivable, $L$ lineal y $B$ bilineal, entonces $g$ es derivable en $A$. Además, derivando y usando que $B \equiv D^2 f(a)$ es simétrica (Teorema de Schwarz) tenemos

$$Dg(x) = Df(x) - L - B(x-a) \qquad (x \in A)$$

Como $Dg$ es derivable, usando que el segundo sumando es constante y el último es afín, y $D^2 f$ es constante, tenemos

$$D^2 g(x) = D^2 f(x) - B = 0.$$

En vista de que $A$ es abierto y conexo, sabemos que $Dg$ es constante y, por ser $Dg(a) = 0$, sabemos que $Dg$ es idénticamente cero. Aplicando de nuevo un corolario que es consecuencia del Teorema del valor medio, obtenemos que $g$ es constante y basta evaluar en $a$ para terminar el problema. Obtenemos entonces que se verifica el enunciado para

$$\begin{aligned} b &= f(a) - Df(a)(a) + \frac{1}{2} D^2 f(a)(a,a), \\ T(x) &= Df(a)(x) - D^2 f(a)(a,x), \\ S(x,x) &= \frac{1}{2} D^2 f(a)(x,x). \end{aligned}$$

5. Basta aplicar la fórmula infinitesimal del resto a la función $f$ dada por

$$f(x,y) = e^{x \operatorname{sen} y} \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2\Big).$$

Las derivadas parciales de orden menor o igual que 3 de $f$ son

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= \operatorname{sen} y \; e^{x \operatorname{sen} y}, \\ D_2 f(x,y) &= x \cos y \; e^{x \operatorname{sen} y}, \\ D^{(2,0)} f(x,y) &= \operatorname{sen}^2 y \; e^{x \operatorname{sen} y}, \\ D^{(1,1)} f(x,y) &= \Big(\cos y + x \operatorname{sen} y \; \cos y\Big) e^{x \operatorname{sen} y}, \\ D^{(0,2)} f(x,y) &= \Big(-x \operatorname{sen} y + x^2 \cos^2 y\Big) e^{x \operatorname{sen} y}, \\ D^{(3,0)} f(x,y) &= \operatorname{sen}^3 y \; e^{x \operatorname{sen} y}, \\ D^{(2,1)} f(x,y) &= \Big(2 \operatorname{sen} y \; \cos y + x \operatorname{sen}^2 y \; \cos y\Big) e^{x \operatorname{sen} y}, \\ D^{(1,2)} f(x,y) &= \Big(-\operatorname{sen} y - x \operatorname{sen}^2 y + 2x \; \cos^2 y + x^2 \operatorname{sen} y \; \cos^2 y\Big) e^{x \operatorname{sen} y}, \\ D^{(0,3)} f(x,y) &= \Big(-x \; \cos y - x^2 \operatorname{sen} y \; \cos y - 2x^2 \operatorname{sen} y \; \cos y + x^3 \cos^3 y\Big) e^{x \operatorname{sen} y}. \end{aligned}$$

Evaluando en $(0,0)$ los únicos valores no nulos son $f(0,0) = 1$ y $D^{(1,1)} f(0,0) = 1$. Por tanto, el polinomio de Taylor de orden 3 de $f$ en $(0,0)$ es

$$\begin{aligned} P_3(x,y) &= f(0,0) + (\nabla f(0,0) | (x,y)) + \frac{1}{2}(x,y) H_f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} d^3 f(0,0)(x,y) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x,y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 0 = \\ &= 1 + xy. \end{aligned}$$

Usando la fórmula infinitesimal del resto, se obtiene que el límite que se pide vale 0.

**Segundo parcial de Análisis I, $2^0$ Matemáticas.**

Curso 2003-2004

1. Tema 3: Resumen de la construcción de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$. Caracterizaciones de la medida de Lebesgue.

2.

   i) Demostrar que existen un subconjunto abierto $U$ de $\mathbb{R}^2$ con $(0,0) \in U$ y funciones $f, g : U \to \mathbb{R}$ de clase $C^\infty$ en $U$ tales que $f(0,0) = g(0,0) = 0$ y

   $$\begin{cases} \operatorname{sen}(f(x,y)) + \cos(g(x,y)) &= y+1 \\ \cos(f(x,y)) + \operatorname{sen}(g(x,y)) &= x+1 \end{cases}$$

   para todo $(x,y) \in U$.

   ii) Calcular las derivadas parciales primeras en $(0,0)$ de $f$ y $g$. Deducir que la aplicación $(x,y) \mapsto (f(x,y), g(x,y))$ es un difeomorfismo de clase $C^\infty$ en un entorno de $(0,0)$ y calcular la matriz jacobiana de la aplicación inversa en el punto $(0,0)$.

   iii) Calcular

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

3. Estudiar los extremos de la función

   $$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

   en el conjunto

   $$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 - z^2 = 2, \ x + y + z = 0\}.$$

4. a) Compruébese la igualdad

   $$\int_0^1 (x \log x)^n \, dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   **Sugerencia:** Aplicar reiteradamente integración por partes.

   b) Pruébese

   $$\int_0^1 x^x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

   **Sugerencia:** Usar la igualdad $x^x = e^{x \log x}$ y el desarrollo en serie de la función exponencial.

5. **Integral de Gauss.**

   a) Probar que la función $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

   $$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

   es integrable y calcular su integral.

   b) Deducir que

   $$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad .$$

*Granada, 18 de junio de 2004*

**Examen final de Análisis I, $2^0$ Matemáticas.**

Curso 2003-2004

1. Tema 9 ó Tema 13.

2. Estudiar los extremos de la función

$$f(x, y, z) = x - y + z^2$$

en el conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}.$$

3. a) Demostrar que existen un subconjunto abierto $U$ de $\mathbb{R}^2$ con $(0,0) \in U$ y una función $f : U \to \mathbb{R}$ de clase $C^\infty$ en $U$ tal que $f(0,0) = \pi/2$ y verifica

$$xy + f(x, y) + y\cos(f(x, y)) = \pi/2$$

para todo $(x, y) \in U$.

b) ¿Tiene $f$ un extremo relativo en $(0,0)$?

4. a) Demostrar que si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces la función $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt \qquad (x \in [0,1])$$

es continua

b) Sea $\varphi \in \mathbf{L}_1([0,1])$. Demostrar que existe una única función $f \in \mathbf{L}_1([0,1])$ tal que

$$\varphi(x) + \frac{1}{2}\int_0^x f(t)\ dt = f(x)$$

para casi todo $x \in [0,1]$. Dar una bola centrada en cero que contenga a $f$.

5. a) **Teorema de derivación de funciones definidas por integrales.** Sean $I$ un intervalo de $\mathbb{R}$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ una función satisfaciendo las siguientes condiciones:

i) $\forall t \in I$, la función $\omega \longmapsto f(t, \omega)$ es integrable en $\Omega$.

ii) $\forall \omega \in \Omega$, la función $t \longmapsto f(t, \omega)$ es derivable en $I$ .

iii) Existe $g : \Omega \to \mathbb{R}$ integrable tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, \omega)\right| \le g(\omega),\ \forall t \in I,\ \forall \omega \in \Omega\ .$$

Probar que la función $F : I \to \mathbb{R}$, definida por

$$F(t) = \int_\Omega f(t, \omega)\ d\mu\ ,$$

es derivable en $I$ con

$$F'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t, \omega)\ d\mu,\ \forall t \in I.$$

b) Estudiar la derivabilidad de la función $F : ]-1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(t) = \int_0^1 x^t e^x dx \qquad (t > -1)$$

*Granada, 6 de julio de 2004*

**Soluciones del examen final de Análisis I, $2^0$ Matemáticas.**

Curso 2003-2004

1.

2. En el interior del conjunto (la bola unidad euclídea abierta) $f$ no tiene extremos relativos, ya que las derivadas parciales de primer orden de la función respecto de las dos primeras variables no tienen ningún cero.

   La frontera del conjunto es la esfera euclídea unidad en $\mathbb{R}^3$, por tanto, es una variedad de dimensión 2, por ser

   $$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

   el conjunto de ceros de la función $g : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

   $$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1, \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$$

   que es de clase infinito y cuyo vector gradiente tiene rango uno en cada punto no nulo.

   La función de Lagrange en este caso viene dada por

   $$F(x,y,z,\lambda) = x - y + z^2 + \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

   Las derivadas parciales de primer orden vienen dadas por

   $$\begin{aligned}
   \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = &\quad 1+2\lambda x \\
   \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = &\quad -1+2\lambda y \\
   \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = &\quad 2z+2\lambda z \\
   \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = &\quad x^2+y^2+z^2-1
   \end{aligned}$$

   Resolvemos ahora el sistema de Lagrange. De la primera ecuación deducimos que $\lambda \neq 0$. De la tercera $z(1+\lambda) = 0$ luego $z = 0$ ó $\lambda = -1$. Si $z = 0$, de la cuarta ecuación tenemos que $x^2+y^2 = 1$ y sumando las dos primeras se tiene que $\lambda(x+y) = 0$, luego como $\lambda \neq 0$, entonces $x = -y$. Finalmente tenemos los puntos críticos

   $$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \ \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad B = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \ \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

   Si $\lambda = -1$, de las dos primeras ecuaciones tenemos $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$. De la cuarta ha de ser $z^2 = \frac{1}{2}$. Por tanto, aparecen las soluciones

   $$C = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ \lambda = -1, \qquad D = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ \lambda = -1 \ .$$

   Evaluando tenemos $f(A) = \sqrt{2}, \ f(B) = -\sqrt{2}, \ f(C) = f(D) = \dfrac{3}{2}$ . Como estamos optimizando una función continua en un compacto, los extremos absolutos se alcanzan en $B$ (mínimo) y en $C$ y $D$ (máximo).

3. a) Consideramos la función $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x,y,z) = xy + z + y\cos z - \frac{\pi}{2} \ .$$

Comprobamos que se verifican las hipótesis del Teorema de la función implícita, ya que $F$ es de clase infinito y $F(0,0,\frac{\pi}{2}) = 0$. Además

$$\nabla F(x,y,z) = (y, x+\cos z, 1 - y \operatorname{sen}\ z), \qquad \text{por tanto} \qquad \nabla F\big(0,0,\frac{\pi}{2}\big) = (0,0,1)$$

y la última componente del vector gradiente en $\big(0,0,\frac{\pi}{2}\big)$ es no nulo. Aplicando el Teorema de la función implícita, existe un entorno de cero $U$ en $\mathbb{R}^2$ y una función $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya gráfica parametriza localmente los ceros de $F$ próximos a $(0,0)$. En particular, $f$ verifica la ecuación

$$xy + f(x,y) + y\cos(f(x,y)) = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall (x,y) \in U \ . \tag{1}$$

b) Además $\nabla f(0,0) = -1(0,0) = (0,0)$, luego el punto $(0,0)$ es un punto crítico de $f$. Calculamos ahora las derivadas parciales de $f$ de segundo orden en cero. Para ello derivamos implícitamente respecto de $x$ y de $y$ en la ecuación (1), obtenemos

$$y + \frac{\partial f}{\partial x} - y \operatorname{sen}\ f \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$x + \frac{\partial f}{\partial y} + \cos f - y \operatorname{sen}\ f \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Ahora derivamos parcialmente respecto de ambas variables la primera ecuación y respecto de la segunda variable en la segunda ecuación, obteniendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - y\cos f \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2 - y \operatorname{sen}\ f \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = 0$$

$$1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \operatorname{sen}\ f \frac{\partial f}{\partial x} - y\cos f \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - y \operatorname{sen}\ f \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} - \operatorname{sen}\ f \frac{\partial f}{\partial y} - \operatorname{sen}\ f \frac{\partial f}{\partial y} - y\cos f \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2 - y \operatorname{sen}\ f \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$$

Teniendo en cuenta que $f(0,0) = \frac{\pi}{2}$ y que las derivadas parciales de primer orden en cero se anulan, tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0) = 0$$

$$1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0) = 0$$

Por tanto, la matriz hessiana de $f$ en $(0,0)$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que no es semidefinida, por ser su determinante negativo. Por tanto, $(0,0)$ no es un extremo relativo de $f$.

4. a) Sea $x \in [0,1]$ y $\{x_n\}$ una sucesión en $[0,1]$ convergente a $x$, entonces, por ser

$$F(y) = \int_0^1 f\chi_{[0,y]}(t)\ dt, \qquad \forall y \in [0,1],$$

y como la sucesión $\{\chi_{[0,x_n]}\}$ convergente puntualmente casi por doquier a $\chi_{[0,x]}$ y se verifica que $|f\chi_{[0,x_n]}| \leq |f|$, aplicando el Teorema de la convergencia dominada, obtenemos que

$$F(x) = \int_0^1 f\chi_{[0,x]}\ (t)\ dt = \lim_n \Big\{ \int_0^1 f\chi_{[0,x_n]}(t)\ dt \Big\} = \lim_n \{F(x_n)\},$$

por tanto $F$ es continua en $x$, para cualquier elemento $x$ de $[0,1]$. Como $F$ es continua en $[0,1]$, en particular, es integrable (medible y acotada en un conjunto de medida finita).

b) Para $f \in \mathbf{L}_1([0,1])$, definimos

$$(Tf)(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\int_0^x f(t)\ dt \qquad (x \in [0,1])$$

La función $Tf$ es claramente integrable (suma de integrables) en $[0,1]$, el espacio $\mathbf{L}_1([0,1])$ es de Banach (Teorema de Riesz) y además se verifica que

$$\begin{aligned}
\|T(f) - T(g)\|_1 &= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big| \int_0^x f(t)\ dt - \int_0^x g(t)\ dt \Big|\ dx \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \Big( \int_0^x |f(t) - g(t)|\ dt \Big)\ dx \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \|f - g\|_1\ dx = \frac{1}{2}\|f - g\|_1
\end{aligned}$$

Hemos comprobado que $T$ es contractiva y por el Teorema del punto fijo de Banach tiene un único punto fijo $f$ en el espacio $\mathbf{L}_1([0,1])$.

Para localizar el único punto fijo, basta encontrar una bola cerrada que sea invariante por $T$. Llamamos $K = \|\varphi\|_1$ y supongamos que $\|f\|_1 \leq R$. Claramente se tiene que

$$\|Tf\|_1 \leq \|\varphi\|_1 + \frac{1}{2}\|f\|_1 \leq K + \frac{1}{2}R$$

Tomando $R$ tal que $R \geq 2K$, entonces $T$ fija la bola cerrada en $\mathbf{L}_1([0,1])$ centrada en cero de radio $R$ y basta aplicar el teorema del punto fijo de Banach, ya que la bola cerrada es un espacio métrico completo (cerrado de un completo).

5. a) **Teorema de derivación de funciones definidas por integrales.**
Sea $t_0 \in I$ y sea $\{t_n\}$ una sucesión de puntos de $I$ distintos de $t_0$ y convergente a $t_0$. Para cada natural $n$ y para cada $\omega \in \Omega$, la función $f(\cdot, \omega)$, en virtud de la hipótesis ii), es derivable en el intervalo determinado por los puntos $t_0$ y $t_n$. El Teorema del valor medio nos garantiza, en consecuencia, la existencia de un punto $c_n$ del intervalo abierto de extremos $t_0$ y $t_n$ tal que

$$\left| \frac{f(t_n,\omega) - f(t_0,\omega)}{t_n - t_0} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(c_n, \omega) \right|.$$

La hipótesis iii) nos asegura ahora que

$$\left| \frac{f(t_n,\omega) - f(t_0,\omega)}{t_n - t_0} \right| \leq g(\omega),\ \forall \omega \in \Omega.$$

Si para cada natural $n$ se define $\Phi_n : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi_n(\omega) = \frac{f(t_n,\omega) - f(t_0,\omega)}{t_n - t_0},$$

obtenemos una sucesión de funciones integrables en $\Omega$ (hipótesis i)), tal que

$$|\Phi_n(\omega)| \leq g(\omega), \ \forall \omega \in \Omega.$$

Es claro que para cada $\omega \in \Omega$ se verifica que

$$\{\Phi_n(\omega)\} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,\omega),$$

y como como la función $\omega \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial t}\ (t_0,\omega)$ es medible, el T.C.D. nos asegura que dicha función es integrable y que

$$\lim_n \Big\{ \int_\Omega \frac{f(t_n,\omega) - f(t_0,\omega)}{t_n - t_0}\ d\mu \Big\} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}\ (t_0,\omega)\ d\mu,$$

es decir,

$$\frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} \longmapsto \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,\omega)\ d\mu,$$

o lo que es igual, la función $F$ es derivable en $t_0$ con

$$F'(t_0) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}\ (t_0,\omega)\ d\mu.$$

b) Comprobamos las hipótesis del apartado a) para la función

$$f(t,x) = x^t e^x \qquad (t > -1, x \in ]0,1[)$$

i) Para cada $t > -1$ fijo, la función $x \mapsto x^t e^x$ es integrable en $]0,1[$. En efecto, como es continua, es medible. Además en $]0,1[$ está mayorada por la función $x \mapsto x^t e$, que es integrable (Regla de Barrow) y basta usar el criterio de comparación.

ii) Claramente se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = (\log x) x^t e^x.$$

iii) Si $t_0 > -1$, fijamos un real $-1 < t < t_0$ y obtenemos que

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial t}(s,x)\Big| = |\log x| x^s e^x \leq |\log x| x^t e, \qquad \forall s > t, x \in ]0,1[.$$

y la función $x \mapsto -(\log x)x^t$ es integrable, ya que es positiva y aplicando integración por partes se obtiene que una de sus primitivas en $]0,1[$, la función $x \mapsto \frac{x^{t+1}}{t+1}\Big(\frac{1}{t+1} - \log x\Big)$ tiene límites en 0 y en 1. Basta entonces aplicar la Regla de Barrow.

Finalmente, tenemos que

$$f'(t) = \int_0^1 (\log x) x^t e^x\ dx, \qquad \forall t > -1.$$

**Examen de septiembre de Análisis I, $2^0$ Matemáticas.**

Curso 2003-2004

(a) Tema de teoría.

(b) a) Demostrar que existen un subconjunto abierto $U$ de $\mathbb{R}^2$ con $(0,0) \in U$ y funciones $f, g : U \to \mathbb{R}$ de clase $C^\infty$ en $U$ tales que $f(0,0) = 0, g(0,0) = 0$ y se verifican para cualquier elemento $(x,y) \in U$ las ecuaciones

$$\operatorname{sen}\ f(x,y) + x + \cos g(x,y) = 1$$

$$\arctan g(x,y) + y = 0$$

b) ¿Se puede conseguir que la función $(f,g)$ sea un difeomorfismo de clase infinito en un entorno de cero?

(c) a) Demostrar que si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces la función $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt \qquad (x \in [0,1])$$

es continua

b) Sea $\varphi \in \mathcal{C}([0,1])$. Demostrar que existe una única función $f \in \mathcal{C}([0,1])$ tal que

$$\varphi(x) + \frac{1}{2}\int_0^x f(t)\ dt = f(x), \qquad \forall x \in [0,1]\ .$$

Dar una bola centrada en cero que contenga a $f$.

(d) Calcular el área del conjunto $E$ dado por

$$E = \{(\rho\ \cos\theta, \rho\ \operatorname{sen}\ \theta) :\ -\pi < \theta \leq \pi,\ 0 \leq \rho \leq 2a(1+\cos\theta)\}\ .$$

(e) Probar las siguientes igualdades:

a)

$$\lim_n \left\{ \int_0^1 \frac{nx \ln x}{1+n^2x^2}\ dx \right\} = 0\ .$$

b)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x}\ dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

*Granada, 2 de septiembre de 2004*

**Soluciones del examen de septiembre de Análisis I, $2^0$ Matemáticas.**

Curso 2003-2004

(a)

(b) a) Consideramos la función $F:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x,y,u,v) = (\text{sen }\ u + x + \cos v - 1, \arctan v + y)\ ,$$

que evidentemente es de clase infinito y verifica

$$F(0,0,0,0) = (0,0)\ .$$

Además

$$J_F(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos u & -\text{sen }\ v \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1+v^2} \end{pmatrix}\ .$$

Por tanto,

$$J_F(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene determinante uno, por tanto es inversible. Aplicando el Teorema de la función implícita, existe un entorno de cero $U$ en $\mathbb{R}^2$ y una función $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase infinito cuya gráfica parametriza localmente los ceros de $F$ próximos a $(0,0,0,0)$. En particular, si llamamos $\varphi = (f,g)$, las funciones $f,g$ verifican las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \text{sen }\ f(x,y) + x + \cos g(x,y) = 1 \\ \arctan g(x,y) + y = 0 \end{aligned}\right\} \quad \forall (x,y) \in U\ .$$

b) Como el jacobiano de $\varphi$ en $(0,0)$ viene dado por

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,$$

la función $\varphi$ verifica las hipótesis del Teorema de la función inversa, por tanto es un difeomorfismo de clase infinito en un entorno de $(0,0)$.

(c) a) Sea $x \in [0,1]$ y $\{x_n\}$ una sucesión en $[0,1]$ convergente a $x$, entonces, por ser

$$F(y) = \int_0^1 f\chi_{[0,y]}(t)\ dt, \qquad \forall y \in [0,1],$$

y como la sucesión $\{\chi_{[0,x_n]}\}$ converge puntualmente casi por doquier a $\chi_{[0,x]}$, se verifica que $|f\chi_{[0,x_n]}| \leq |f|$, $f$ es integrable y $f\chi_{[0,x_n]}$ es medible, para cada $n$, aplicando el Teorema de la convergencia dominada, obtenemos que

$$F(x) = \int_0^1 f\chi_{[0,x]}\ (t)\ dt = \lim_n \left\{ \int_0^1 f\chi_{[0,x_n]}(t)\ dt \right\} = \lim_n \{F(x_n)\},$$

por tanto $F$ es continua en $x$, para cualquier elemento $x$ de $[0,1]$. Como $F$ es continua en $[0,1]$, en particular, es integrable (medible y acotada en un conjunto de medida finita).

b) Para $f \in \mathcal{C}([0,1])$, definimos

$$(Tf)(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\int_0^x f(t)\ dt \qquad\qquad (x \in [0,1])$$

La función $Tf$ es claramente integrable (suma de integrables) en $[0,1]$, el espacio $\mathcal{C}([0,1])$ es de Banach y además se verifica que

$$\begin{aligned}|\big(T(f) - T(g)\big)(x)| = \frac{1}{2}\Big|\int_0^x f(t)\ dt - \int_0^x g(t)\ dt\Big| \leq \\ \leq \frac{1}{2}\int_0^x |f(t) - g(t)|\ dt \leq \\ \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \|f-g\|_\infty\ dt = \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty\end{aligned}$$

Hemos comprobado que $T$ es contractiva y por el Teorema del punto fijo de Banach tiene un único punto fijo $f$ en el espacio $\mathcal{C}([0,1])$.
Para localizar el único punto fijo, basta encontrar una bola cerrada que sea invariante por $T$. Supongamos que $\|f\|_\infty \leq R$. Claramente se tiene que

$$\|Tf\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty + \frac{1}{2}\|f\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty + \frac{1}{2}R\ .$$

Tomando $R$ tal que $R \geq 2\|\varphi\|_\infty$, entonces $T$ fija la bola cerrada en $\mathcal{C}([0,1])$ centrada en cero de radio $R$ y basta aplicar el Teorema del punto fijo de Banach, ya que la bola cerrada es un espacio métrico completo (cerrado de un completo).

(d) **Área de la cardioide.**
La curva en $\mathbb{R}^2$ cuya ecuación en coordenadas polares viene dada por

$$\rho = 2a(1+\cos\theta)$$

donde $a$ es un positivo y $-\pi < \theta \leq \pi$, se llama *cardioide*. Sea $E$ el conjunto dado por

$$E := \{(\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\ \theta) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < \theta \leq \pi, 0 \leq \rho \leq 2a(1+\cos\theta)\}\ .$$

Sabemos que $E$ es acotado y además es medible (complemento de un cerrado en un compacto), luego tiene medida finita y además, usando el cambio a polares $(\Phi)$ se tiene que

$$\Phi^{-1}(E) = \{(\rho,\theta) : -\pi < \theta \leq \pi, 0 \leq \rho \leq 2a(1+\cos\theta)\} \quad \text{c.p.d.} \qquad \text{y}$$

$$\lambda(E) = \int_E d(x,y) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \rho\ d(\rho,\theta)\ .$$

Usando el Teorema de Fubini, tenemos

$$\lambda(E) = \int_{-\pi}^{\pi}\Big[\int_0^{2a(1+\cos\theta)} \rho\ d\rho\Big]\ d\theta = 2a^2\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\theta)^2\ d\theta =$$

$$= \Big(\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\Big) = 2a^2\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos(2\theta)\Big)\ d\theta = 6a^2\pi\ .$$

(e) a) Definimos la sucesión de funciones $\{f_n\}$ dada por

$$f_n(x) = \frac{nx \log x}{1 + n^2 x^2} \quad (x \in ]0,1[) \ .$$

Es claro que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero. Por ser

$$0 \leq (1 - nx)^2 = 1 + n^2x^2 - 2nx,$$

se tiene que

$$\frac{nx}{1 + n^2x^2} \leq \frac{1}{2} \ .$$

Por tanto, se verifica que

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2} |\log x|.$$

Aplicando el método de integración por partes y la Regla de Barrow, se obtiene que la función $x \mapsto \log x$ es integrable en $]0,1[$. Como además, las funciones de la sucesión son medibles, aplicando el Teorema de la convergencia dominada, la sucesión de integrales anterior converge a cero.

b) Para $x > 0$ se tiene

$$\frac{x}{1+e^x} = \frac{x}{e^x}\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{x}{e^x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-nx} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x e^{-(n+1)x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} x e^{-nx}.$$

Aplicaremos el Teorema de la convergencia absoluta a la sucesión de funciones integrables

$$f_n(x) = (-1)^{n+1} x e^{-nx}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Integrando por partes, calculamos

$$\int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} x e^{-nx} \ dx = \frac{1}{n^2}.$$

Por tanto, al ser la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente, se puede aplicar el Teorema de la convergencia absoluta, obteniéndose que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x} \ dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} x e^{-nx}\Big) dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_0^{+\infty}(-1)^{n+1} x e^{-nx} \ dx\Big) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$