Primer parcial de Análisis I, 2^0 Matemáticas,

Curso 2002-2003

1. Tema: Conceptos de compacidad y conexión. Teoremas de conservación de la compacidad y la conexión.

2. a) Pruébese que no existe más espacio normado de dimensión N que $\mathbb{R}^N$ con una conveniente norma.

   b) Sea N un número natural y sean $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_N$ números reales distintos. En el espacio vectorial X de todas las funciones polinómicas de grado menor o igual que N definimos:

$$\|f\| := \sum_{k=0}^{N} |f(\alpha_k)|, \qquad (f \in X).$$

   Probar que

   i) $\|\cdot\|$ es una norma en X.

   ii) La topología que genera esta norma no depende de la elección de los reales α_k $(0 \leq k \leq N)$.

   iii) Una sucesión $\{p_n\}$ en X converge uniformemente en un intervalo $[a, b]$ si, y sólo si, existen $N+1$ números reales distintos del intervalo $[a, b]$, $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_N$, tales que $\{p_n(\beta_k)\}$ converge para $k = 0, 1, ..., N$.

3. **a)** Pruébese que una función real $f \in \mathcal{C}^1[a, b]$ es uniformemente continua. De hecho, existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|, \ \forall x, y \in [a, b].$$

   b) Si $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$, ¿es f lipschitziana en compactos?, ¿es uniformemente continua en $\mathbb{R}^N$?

4. Pruébese que la función $f : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{3}\big(x \arctan y, 1 + \text{sen } (xy)\big) \quad (x, y \in [0, 1])$$

   tiene un único punto fijo.

5. Sea $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función uniformemente continua.

   i) Pruébese que si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy tal que $x_n \in]a, b[$ para cada natural n, entonces $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy.

   ii) Pruébese que existe un número real L que verifica la siguiente propiedad

$$\big(x_n \in \,]a, b[, \ \forall n, \quad \{x_n\} \to a\big) \ \Rightarrow \ \{f(x_n)\} \to L.$$

   iii) Como consecuencia de i) y ii), pruébese que f tiene una única extensión continua $\widetilde{f} : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$. Esto es, existe una única función continua $\widetilde{f} : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\widetilde{f}(x) = f(x), \quad \forall x \in]a, b[.$$

Granada, 12 de febrero de 2003

RESPUESTA A LOS EJERCICIOS

2.

a) Sea $\{u_1, \ldots, u_N\}$ una base de un espacio vectorial Y y $\{e_1, \ldots, e_N\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^N$. La extensión por linealidad de la aplicación

$$f : Y \longrightarrow R^N$$

definida por

$$f(u_k) = e_k, \ \forall k = 1, \ldots, N,$$

es claramente una biyección lineal. Es fácil comprobar que si $\| \cdot \|$ es una norma en Y, entonces

$$\||\, f(x) \,\|| := \|x\|, \ \forall x \in \ Y,$$

es una norma en $\mathbb{R}^N$ que hace que f sea una biyección lineal isométrica.

b)

i) Es rutinaria la comprobación de que $\| \cdot \|$ es una norma en el espacio vectorial X.

ii) Como el espacio vectorial X es de dimensión finita basta recordar el Teorema de Hausdorff que nos asegura que todas las normas son equivalentes, esto es, generan la misma topología en $\mathbb{R}^{N+1}$ y usar el apartado a).

iii) Es claro que la convergencia uniforme en $[a, b]$ implica la convergencia puntual, y, en particular, la convergencia de las sucesiones $\{p_n(\beta_k)\}$ para $k = 0, 1, \cdots, N$. Recíprocamente, supongamos que las $N + 1$ sucesiones anteriores son convergentes. Es sabido que existe un único polinomio p de grado de grado menor o igual que N tal que

$$p(\beta_k) = \lim p_n(\beta_k), \ \forall k = 0, \ldots, N.$$

Se tiene que

$$\|p - p_n\| = \sum_{k=0}^{N} |p(\beta_k) - p_n(\beta_k)| \longrightarrow 0,$$

es decir $\{p_n\}$ converge a p en $(X, \| \cdot \|)$. Ahora de nuevo el Teorema de Hausdorff nos asegura que $\{p_n\}$ converge uniformemente a p en $[a, b]$, ya que

$$\|p\|_\infty := \max\{|p(x)| : \ x \in [a, b]\}$$

es una norma en la restricción de los polinomios de X al intervalo $[a, b]$.

3.

a) La propiedad de compacidad nos asegura la existencia de

$$M := \max\{|f'(x)| : +x \in [a, b]\}.$$

Sean $x, y \in [a, b], x \neq y$. El Teorema del Valor medio real nos asegura la existencia de un punto c del intervalo abierto de extremos x, y tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x),$$

y en consecuencia

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|, \ \forall x, y \in [a, b].$$

b) Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ un compacto. Consideremos un natural n tal que $K \subset \overline{B}(0,n)$. Por ser f de clase $\mathcal{C}^1$, la propiedad de compacidad nos asegura que existe M, tal que

$$\|Df(z)\| \leq M, \ \forall z \in \overline{B}(0,n).$$

Como consecuencia del Teorema del valor medio

$$\big[x, y \in \overline{B}(0,n)\big] \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|,$$

y con mayor motivo

$$[x, y \in K] \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|,$$

esto es, f es lipschitziana en K y, por tanto, uniformemente continua en K.
Ni siquiera una función real de clase $\mathcal{C}^1$ ha de ser uniformemente continua. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$J_f(x,y) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \arctan y & \dfrac{x}{1+y^2} \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \end{pmatrix},$$

y en consecuencia si $x, y \in [0,1]$

$$\sum_{i,j} D_j f_i(x,y)^2 \leq \frac{\dfrac{\pi^2}{16} + 3}{9} \leq \frac{4}{9},$$

con lo cual el Teorema práctico del valor medio nos asegura que

$$\|f(a,b) - f(c,d)\|_2 \leq \frac{2}{3}\|(a,b) - (c,d)\|_2, \ \forall \ a,b,c,d \in [0,1],$$

y en consecuencia la función f es contractiva. Es inmediato que

$$f\left([0,1] \times [0,1]\right) \subset [0,1] \times [0,1].$$

Como $[0,1] \times [0,1]$ es completo por ser cerrado en $\mathbb{R}^2$, el Teorema del punto fijo de Banach nos asegura la existencia de un único punto fijo de la función f.

5.

Sea $\varepsilon > 0$ fijo. La continuidad uniforme de f nos asegura la existencia de $\delta > 0$ tal que

$$(x, y \in]a, b[, |a - b| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

i) Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $p, q \geq m \Rightarrow |x_p - x_q| < \delta$. Se tiene que

$$p, q \geq m \Rightarrow |f(x_p) - f(x_q)| < \varepsilon,$$

es decir la sucesión $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy.

ii) Como la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy, el apartado i) y el Teorema de complitud de $\mathbb{R}$ nos aseguran la existencia de un real L tal que

$$\{f(x_n)\} \to L$$

Supongamos ahora que $\{y_n\}$ es otra sucesión en $]a, b[$ convergente al punto a, la sucesión

$$\{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\}$$

también converge al punto a, y por lo ya demostrado, la sucesión

$$\{f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \dots\}$$

es convergente, de donde se deduce que las sucesiones $\{f(x_n)\}$ y $\{f(y_n)\}$ tienen el mismo límite L.

iii) Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $]a, b[$ con $\{x_n\} \to a$. Si queremos que $\widetilde{f}$ sea continua en a, obligadamente ha de ser

$$\widetilde{f}(a) := \lim f(x_n).$$

El apartado ii) nos asegura que el valor de $\widetilde{f}(a)$ no depende de la particular sucesión elegida en $]a, b[$ convergente al punto a.

De ii) y el carácter local de la continuidad se deduce que $\widetilde{f}$ es continua en $[a, b[$.

Segundo parcial de Análisis I, 2^0 Matemáticas,

Curso 2002-2003

1. Tema: Teorema de densidad de las funciones simples integrables en $\mathcal{L}(\mu)$. Teorema de densidad de las funciones simples escalonadas y de las funciones de soporte compacto en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$.

2. Justificar la existencia de dos abiertos difeomorfos A y B de $\mathbb{R}^2$ verificando que $(0,0) \in A$, $(1,1) \in B$ y para cada $(x,y) \in A$ existe un único $(u,v) \in B$ tal que:

$$\begin{cases} x + e^u + v = e + 1 \\ y + \text{sen } x + \log u = 0 \end{cases}$$

Calcular

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(0,0).$$

3. Determinar las dimensiones del ortoedro de mayor volumen que se puede inscribir en el elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

donde a, b, c son números reales positivos fijos.

4. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\{A_n\}$ una sucesión de conjuntos medibles. Pruébese que la serie $\sum \frac{1}{2^n}\chi_{A_n}$ converge uniformemente a una función medible $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $0 \leq f \leq 1$. Probar también que

$$\int_\Omega f \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\mu(A_n).$$

5. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida.
   (a) Sea $f \in \mathcal{L}(\mu)$. Probar que

$$n \; \mu\big(\{\omega \in \Omega : \; |f(\omega)| \geq n\}\big) \longrightarrow 0.$$

   (b) Si la función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible, no negativa y no integrable, ¿es cierto lo anterior?
   (Justificar en caso de que sea cierto y dar un contraejemplo si no lo es).

Granada, 24 de junio de 2003

Examen final de Análisis I, 2^0 Matemáticas,

Curso 2002-2003

1. Tema: Teorema de la función implícita.

2. Pruébese que la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por
$$f(x,y) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}, \frac{\cos y}{2}\right) \qquad (x, y \in \mathbb{R}),$$
tiene un único punto fijo en $[0,1]^2$.

3. Justificar la existencia de dos abiertos difeomorfos U y V de $\mathbb{R}^2$ verificando que $(0,0) \in U$, $(1,1) \in V$ y para cada $(x,y) \in U$ existe un único $(u,v) \in V$ tal que:
$$\begin{cases} \text{sen } x + e^v = e \\ \arctan u + y = \arctan 1 \end{cases}$$
Calcular
$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}(0,0).$$

4. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y f una función integrable no negativa. Pruébense las siguientes afirmaciones:
   (a) La función $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por
   $$\nu(E) = \int_E f \, d\mu \qquad (E \in \mathcal{A})$$
   es una medida en $(\Omega, \mathcal{A})$.
   (b) Se verifica que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
   $$E \in \mathcal{A},\ \mu(E) < \delta \ \Rightarrow\ \nu(E) < \varepsilon.$$
   Indicación: Úsense los conjuntos $A_n = \{x \in \Omega : f(x) \leq n\}$ y el Teorema de la convergencia monótona.

5. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida.
   (a) Sea $f \in \mathcal{L}(\mu)$. Probar que
   $$n\ \mu\big(\{\omega \in \Omega : \ |f(\omega)| \geq n\}\big) \longrightarrow 0.$$
   Indicación: Úsese el Teorema de la convergencia dominada.

   (b) Si la función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible, no negativa y no integrable, ¿es cierto lo anterior?
   (Justificar en caso de que sea cierto y dar un contraejemplo si no lo es).

Granada, 8 de julio de 2003

Examen final de Análisis I, 2^0 Matemáticas, Curso 2002-2003
Soluciones

1. Tema de teoría.

2. En primer lugar, f fija el cuadrado $[0,1]^2$, ya que, si $x, y \in [0,1]^2$, se tiene

$$0 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\arctan\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} < 1, \qquad 0 \leq \frac{\cos y}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

El cuadrado $[0,1]^2$ es completo y basta comprobar que la restricción de f a este cuadrado es contractiva. Para ello, usamos el Teorema del valor medio. Claramente $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ y se tiene que

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\dfrac{1}{1+(\frac{x}{2})^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-\operatorname{sen}\ y}{2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, si $x, y \in [0,1]^2$ se tiene que

$$\|Df(x,y)\|^2 \leq \Big(\frac{1}{4}\Big)^2\Big(\frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}\Big)^2 + \frac{\operatorname{sen}^2 y}{4} \leq \frac{1}{16} + \frac{1}{4} < 1.$$

Como consecuencia, aplicando el Teorema del valor medio (el dominio es convexo), f es contractiva (la constante de Lipschitz es menor o igual que $\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$) y basta aplicar el Teorema del punto fijo de Banach.

3. Basta aplicar, en primer lugar, el Teorema de la función implícita a la función $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x,y,u,v) = (\operatorname{sen}\ x + e^v - e - 1, \arctan u + y - \arctan 1) \qquad (x,y,u,v \in \mathbb{R}).$$

Es claro que F es de clase infinito y $F(0,0,1,1) = (0,0)$. Además

$$J_F(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & 0 & e^v \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+u^2} & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\det\begin{pmatrix} 0 & e \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{e}{2} \neq 0.$$

Por tanto, existe un abierto A de $\mathbb{R}^2$ que contiene a $(0,0)$ y una función $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase infinito tal que la gráfica de φ parametriza los ceros de F en un entorno de $(0,0,1,1)$.

Por tanto, si $(x,y) \in A$ y $\varphi(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, se tiene que

$$J_\varphi(x,y) = -\begin{pmatrix} 0 & e^v \\ \frac{1}{1+u^2} & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como las matrices que aparecen en la expresión del jacobiano de φ son inversibles en el punto $(0,0)$, entonces, φ verifica las hipótesis del Teorema de la función inversa y basta aplicar este resultado para obtener los abiertos U y V tales que φ es un difeomorfismo de U en V, y $\varphi(0,0) = (1,1)$.

Para calcular las derivadas parciales basta derivar parcialmente en la condición implícita que verifica φ.

Derivando parcialmente respecto de y, se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{1+u^2} + 1 = 0,$$

de donde, evaluando en $(0,0)$ se obtiene$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = -2$.

Derivando parcialmente una vez más en ecuación anterior se tiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\frac{1}{1+u^2} + 2u\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 \frac{-1}{(1+u^2)^2} = 0.$$

Sustituyendo y despejando se obtiene $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0) = 4$.

4. (a) Sea $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, donde $\{E_n\}$ es una sucesión de elementos disjuntos de $\mathcal{A}$. Obsérvese que

$$f\ \chi_E = f\ \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\ f\ \chi_{E_n},$$

y, de la definición de ν, se tiene que

$$\nu(E) = \int_E\ f\ d\mu = \int_\Omega\ f\ \chi_E\ d\mu \quad \text{y}$$

$$\nu(E_n) = \int_{E_n} f\ d\mu = \int_\Omega f\ \chi_{E_n}\ d\mu,$$

donde se ha utilizado que la integral extendida a un conjunto medible de una función f medible positiva coincide con la integral de la prolongación por cero de f fuera de dicho conjunto. Por tanto,

$$\nu(E) = \int_\Omega f\ \chi_E\ d\mu = \int_\Omega \lim\Big(\sum_{k=1}^{n} f\ \chi_{E_k}\Big)d\mu =$$

$$\lim \int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^{n} f\ \chi_{E_k}\Big)d\mu = \lim \sum_{k=1}^{n}\int_\Omega f\ \chi_{E_k}\ d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_\Omega f\ \chi_{E_k}\ d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\nu(E_k)$$

donde se ha utilizado el Teorema de la convergencia monótona. Así ν es una medida.

(b) Dado $\varepsilon > 0$ y un natural n, sea $A_n = \{\omega \in \Omega :\ f(\omega) \leq n\}$. Se tiene que $A_n \in \mathcal{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y que $f\ \chi_{A_n} \nearrow f$. El Teorema de la convergencia monótona garantiza que

$$\int_\Omega f\ \chi_{A_n}\ d\mu \nearrow \int_\Omega f\ d\mu.$$

Existe entonces un natural n tal que $\int_\Omega \big(f - f\ \chi_{A_n}\big)\ d\mu < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Tomamos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2n}$. Si $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}\nu(E) = \int_E f\ d\mu &= \int_E (f - f\ \chi_{A_n}) d\mu + \int_E f\ \chi_{A_n}\ d\mu \\ &\leq \int_\Omega (f - f\ \chi_{A_n}) d\mu + \int_E n\ d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + n\frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon.\end{aligned}$$

5. a) Sea $f \in \mathcal{L}(\mu)$. Para cada natural n sea $A_n := \{\omega \in \Omega :\ |f(\omega)| \geq n\}$. Se tiene que

$$0 \leq n\ \chi_{A_n} \leq |f|,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\{n\ \chi_{A_n}\} \longrightarrow 0$, el T.C.D. nos asegura que

$$\{n\ \mu(A_n)\} = \left\{\int_\Omega n\ \chi_{A_n}\ d\mu\right\} \longrightarrow 0$$

b) No es cierto si la función no es integrable. Basta considerar cualquiera de las funciones siguientes: $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad (0 < x < 1)$$

ó $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \mathrm{E}(x) \quad \text{(parte entera de } x\text{)}$$

Examen septiembre de Análisis I, 2^0 Matemáticas,

Curso 2002-2003

1. Tema:

2. Sea $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el campo vectorial definido por
$$f(x, y) = (1 + \text{sen } x, \arctan y) \qquad (x, y \in [-1, 1]).$$
Probar que existe un único punto $p \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ tal que $f(p) = 2p$.

3. Justificar la existencia de un campo vectorial $f = (f_1, f_2)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ de un abierto U de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ verificando
$$f(1, -1) = (1, 1) \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{matrix} x^2 + y^2 - 2f_1(x, y)f_2(x, y) = 0 \\ x^3 + y^3 + f_1(x, y)^3 - f_2(x, y)^3 = 0 \end{matrix} \right\}, \ \forall (x, y) \in U.$$
Calcular $Df(1, -1)$ y $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(1, -1)$ ¿Se puede conseguir que f sea un difeomorfismo de un entorno de $(1, -1)$ sobre un entorno de $(1, 1)$?

4. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\{A_n\}$ una sucesión de conjuntos medibles. Pruébese que la serie $\sum \frac{1}{2^n}\chi_{A_n}$ converge uniformemente a una función medible $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $0 \leq f \leq 1$. Probar también que
$$\int_\Omega f \ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\mu(A_n).$$

5. (a) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida con $\mu(\Omega) < \infty$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en Ω que converge puntualmente a una función f. Supongamos que existe una constante $M \geq 0$ tal que $|f_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Probar que f es integrable y que
$$\lim_n \int_\Omega |f - f_n| \ d\mu = 0$$
   (b) Dar un ejemplo mostrando que la hipótesis $\mu(\Omega) < \infty$ no puede ser suprimida.
   (c) Calcular
$$\lim_n \int_0^1 \frac{nx}{1 + n^2x^2} \ dx.$$

Granada, 18 de septiembre de 2003

Soluciones del examen septiembre de Análisis I, 2^0 Matemáticas,

Curso 2002-2003

1. Tema

2. El conjunto $[-1,1] \times [-1,1]$ es convexo (hipótesis del Teorema del valor medio) y es completo (cerrado de $\mathbb{R}^2$). Además, es fácil comprobar que la función $\frac{f}{2}$ conserva el conjunto anterior, ya que

$$\frac{|1+\text{sen }\ x|}{2} \le \frac{1}{2} + \frac{|\text{ sen }\ x|}{2} \le 1 \qquad \text{y} \qquad \left|\frac{\arctan y}{2}\right| \le \frac{\arctan 1}{2} \le \frac{\pi}{4} \le 1.$$

Para $x, y \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+y^2} \end{pmatrix},$$

y en consecuencia,

$$\sum_{i,j} D_j f_i(x)^2 = \cos^2 x + \frac{1}{(1+y^2)^2} \le 2.$$

El Teorema del valor medio nos asegura que f es lipschitziana con constante de Lipschitz menor o igual que $\sqrt{2}$. Así, $\frac{f}{2}$ es contractiva. El resultado se sigue del Teorema del punto fijo de Banach.

3. Se trata de definir un campo vectorial g que verifique en el punto $(1,-1,1,1)$ las hipótesis del Teorema de la función implícita y que nos permita justificar la existencia de los campos escalares f_1 y f_2 verificando las condiciones del enunciado. Este campo vectorial no puede ser otro que

$$g(x,y,u,v) := \big(x^2 + y^2 - 2uv\ ,\ x^3 + y^3 + u^3 - v^3\big), \qquad \forall (x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4.$$

g es de clase $\mathcal{C}^\infty$, verifica que $g(1,-1,1,1) = (0,0)$ y como

$$J_g(1,-1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix},$$

al ser $\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, existen un entorno U de $(1,-1)$ y un campo vectorial $f : U \to \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ tal que

$$g\big(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)\big) = (0,0), \qquad \forall (x,y) \in U.$$

El Teorema de la función implícita nos asegura además que

$$J_f(1,-1) = -\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Derivando dos veces en el sistema respecto de la variable x, y sustituyendo $(x, y, f_1(x,y), f_2(x,y))$ por $(1,-1,1,1)$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$ por 0, y $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$ por 1, nos queda

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} & = & 1 \\ \\ \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(1,-1) = \frac{1}{2}\ .$$

Finalmente, f verifica las hipótesis del Teorema de la función inversa. Basta aplicar este teorema para obtener un difeomorfismo de un entorno de $(1,-1)$ en un entorno de su imagen, el punto $(1,1)$.

4. Es claro que la serie anterior converge puntualmente, por ser puntualmente una serie de términos positivos mayorada por la serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$. Además, la convergencia es uniforme por verificar la condición de Cauchy uniforme, ya que

$$\Big|\sum_{n}^{n+m} \frac{1}{2^k}\chi_{A_k}(x)\Big| \leq \sum_{n}^{n+m} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{n}^{\infty} \frac{1}{2^k}.$$

Es inmediato comprobar también que la suma puntal de la serie es una función f con $0 \leq f \leq 1$, que además es medible, por ser el límite puntual de una sucesión de funciones medibles.

Finalmente, el T.C.M. (versión para sucesión creciente de funciones medibles positivas) nos asegura que

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_n \int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\chi_{A_k}\Big) d\mu = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\mu(A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\mu(A_n).$$

5. a) Las funciones constantes son integrables. En efecto, la función constantemente igual a M , $M\ \chi_\Omega$, es elementalmente integrable con integral igual a $M\ \mu(\Omega)$. El ejercicio es consecuencia del T.C.D.

   b) El siguiente ejemplo muestra que la hipótesis $\mu(\Omega) < \infty$ no puede ser suprimida. Basta tomar $f_n = \frac{1}{2n}\chi_{[-n,n]}$. Es claro que $\{f_n\}$ converge puntualmente a 0 en $\mathbb{R}$ (de hecho converge uniformemente). Además se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\ d\lambda = 1, \quad \forall n \quad \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \Big(\lim_n f_n\Big)\ d\lambda = 0 \neq 1 = \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n\ d\lambda.$$

   Es fácil comprobar que no hay monotonía ni la sucesión esta mayorada por una función integrable. Se puede hacer directamente o bien pensando que en el caso de que existiera monotonía, el T.C.M. daría la igualdad y en el caso de que existiese acotación, el T.C.D. daría también la igualdad.

   c) Para calcular el límite que se pide, basta aplicar el apartado a). Comprobamos la acotación de la sucesión de funciones:

$$0 \leq (1-nx)^2 \Longrightarrow 0 \leq nx \leq \frac{1+n^2x^2}{2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Basta tomar como constante $M = \dfrac{1}{2}$.
Otra forma de acotar en este caso, consiste en optimizar la función $y \mapsto \frac{y}{1+y^2}$ (en $\mathbb{R}_0^+$) derivando, con lo que se obtiene que ésta tiene un máximo absoluto en $y = 1$ que vale $\frac{1}{2}$, de donde $0 \leq \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \ \forall n \in \mathbb{N}$.