Examen Análisis Matemático I.
Primer cuatrimestre curso 2001-2002.

Tema: Teorema del punto fijo de Banach.

El tema y cada ejercicio se puntúan sobre dos.

1. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, y supongamos que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a T, donde se considera la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Pruébese que
$$\|T\|_1 = \text{Max}\{|a| + |c|, |b| + |d|\}$$
$$\|T\|_\infty = \text{Max}\{|a| + |b|, |c| + |d|\}$$
donde $\|T\|_1$ (resp. $\|T\|_\infty$) es la norma del operador T considerando en $\mathbb{R}^2$ la norma $\|.\|_1$ (resp. $\|.\|_\infty$).
¿Que ocurre en $\mathbb{R}^3$?

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el campo escalar definido por
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{|xy|^{\frac{3}{2}}}{x^2 - xy + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $(0,0)$ y en $(1,0)$. Calcular $\nabla f(1,1)$.
Indicación: Puede usarse que $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función dada por
$$f(x,y) := (\operatorname{sen}^2(1 + x + y), \arctan(\operatorname{sen} x)).$$
Demostrar que existe un único punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_0, y_0) = 2(x_0, y_0)$.
Indicación: Pruébese primero que, por ejemplo, fuera de $[-1, 1] \times [-1, 1]$, $\dfrac{f}{2}$ no tiene ningún punto fijo. La igualdad $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$ también puede ser útil.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua verificando
$$f(x + 1, y) = f(x, y) = f(x, y + 1), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
Pruébese:
   i) Que f está acotada y alcanza su máximo y su mínimo.
   ii) Si α, β son dos números reales cualesquiera, entonces existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que
   $$f(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = f(x_0, y_0).$$
   Indicación: Considérense puntos donde f alcanza el máximo y el mínimo.

iii) Que f es uniformemente continua.
Indicación: Véase en primer lugar que la restricción de f a $[-1,2] \times [-1,2]$ es uniformemente continua.

Granada, 6 de febrero de 2002.

Examen Análisis Matemático I.
Segundo cuatrimestre curso 2001-2002.

1. Integral de Gauss.
Probar que
$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\ dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0).$$
Indicación: Probar, utilizando el Teorema del cambio de variable, que la función $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y) = e^{-a(x^2+y^2)}$$
es integrable y calcular su integral.

2. Teorema de derivación de funciones definidas por integrales.
Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ una función satisfaciendo las siguientes condiciones:

i) $\forall t \in E$, la función $\omega \longmapsto f(t, \omega)$ es integrable en Ω.

ii) $\forall \omega \in \Omega$, la función $t \longmapsto f(t, \omega)$ es derivable en I. Así como para cada $t \in I$ la función $\omega \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t, \omega)$ es medible (lo que es automático si la medida μ es completa).

iii) Existe $g : \Omega \to \mathbb{R}$ integrable tal que
$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, \omega)\right| \le g(\omega),\ \forall t \in I,\ \forall \omega \in \Omega\ .$$

Probar que la función $F : I \to \mathbb{R}$, definida por
$$F(t) = \int_\Omega f(t, \omega)\ d\mu\ ,$$
es derivable en I con
$$F'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t, \omega)\ d\mu,\ \forall t \in I.$$
Indicación: Para cada $t \in I$ fijo, considerar una sucesión $\{t_n\}$ de puntos de I distintos de t y convergente a t. Aplicar el T.C.D. a la sucesión de funciones
$$\Phi_n(t) = \frac{f(t_n, \omega) - f(t, \omega)}{t_n - t},\ \forall \omega \in \Omega,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$
El Teorema del valor medio ayuda a comprobar que la sucesión $\{\Phi_n\}$ cumple las hipótesis del T.C.D.

3. Utilizar el Ejercicio anterior para probar que la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx)\ e^{\frac{-x^2}{2}}\ dx,$$

es derivable y obtener una expresión de su derivada.

4. Utilizar el método de integración por partes en la expresión de F' para obtener que $F'(t) = -tF(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$. Deducir de ello que la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dada por

$$t \longmapsto F(t)\ e^{\frac{t^2}{2}}$$

tiene derivada nula. Por último concluir, utilizando el Teorema del valor medio, que

$$F(t) = C\ e^{\frac{-t^2}{2}},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

5 Utilizar el Ejercicio **1** para concluir que

$$F(t) = \sqrt{2\pi}\ e^{\frac{-t^2}{2}},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$