Licenciatura en Ciencias y Técnicas Estadísticas.

ANÁLISIS I (Curso 2006-2007) Granada, 23-Febrero-2007

---

(1) (a) Conceptos de matriz escalonada reducida por filas, de transformación elemental de filas y de forma normal de Hermite por filas.

(b) Concepto de base de un espacio vectorial. Enunciar el Teorema de la base. Probar que todo espacio vectorial no nulo sobre $\mathbb{K}$ es isomorfo a la suma directa de una conveniente familia de copias de $\mathbb{K}$.

(2) (a) Conceptos de polinomio característico, valor propio y multiplicidades algebraica y geométrica. Enunciar los Criterios de diagonalización y de jordanización.

(b) Conceptos de forma bilineal y de forma cuadrática. Clasificación de las formas cuadráticas reales. Enuncia un criterio de clasificación, y comenta sus ventajas e inconvenientes.

(3) (a) Conceptos de sucesión convergente, de sucesión de Cauchy, y de sucesión acotada en un espacio normado. ¿Que relación guardan estos conceptos?. Definir la propiedad de Bolzano-Weierstrass. ¿Quienes son los espacios normados que verifican dicha propiedad?. Concepto de espacio de Banach. ¿Conoces algún espacio normado que no sea un espacio de Banach?

(b) Concepto de subconjunto compacto en un espacio normado. Enunciar y demostrar el Teorema de Riesz.

(4) (a) Justificar la derivabilidad de la función matricial

$$f : M_{2\times 2} \longrightarrow M_{2\times 2},$$

definida por

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto f(X) = \begin{pmatrix} e^{x(1+y+z)} & sen\, t\, cos\, x^2 \\ log(1+y^2+z^2) & \frac{x}{1+x^2+y^2+z^2+t^2} \end{pmatrix}$$

y calcular la derivada matricial $\frac{\partial f}{\partial X}$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial X}(A)$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \pi \end{pmatrix}$.

(b) Conceptos de derivabilidad y de gradiente de un campo escalar en un punto. Relacionar dichos conceptos. Estudiar la derivabilidad del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$$
$$f(0,0) = 0.$$

Licenciatura en Ciencias y Técnicas Estadísticas.

ANÁLISIS I (Curso 2006-2007) Granada, 29-Enero-2007

---

(1) (a) Conceptos de matriz escalonada reducida por filas, de transformación elemental de filas y de forma normal de Hermite por filas.

(b) Conceptos de matriz elemental, y de matriz inversible. ¿Que relación guardan las matrices elementales y las matrices inversibles?

(2) (a) Conceptos de polinomio característico, valor propio y multiplicidades algebraica y geométrica. Enunciar los Criterios de diagonalización y de jordanización.

(b) Conceptos de forma bilineal y de forma cuadrática. Clasificación de las formas cuadráticas reales. Cuantos criterios de clasificación conoces? Comenta las ventajas e inconvenientes de alguno de ellos.

(3) (a) Conceptos de sucesión convergente, de sucesión de Cauchy, y de sucesión acotada en un espacio normado. ¿Que relación guardan estos conceptos?. Definir la propiedad de Bolzano-Weierstrass. ¿Quienes son los espacios normados que verifican dicha propiedad?. Concepto de espacio de Banach. ¿Conoces algún espacio normado que no sea un espacio de Banach?

(b) Caracteriza las aplicaciones lineales y continuas entre espacios normados. Da un ejemplo de una aplicación lineal entre espacios normados que sea continua, y otro de una que sea discontinua.

(4) (a) Concepto de función componente de un campo vectorial. ¿Qué relación guardan la continuidad y la derivabilidad de un campo vectorial con la continuidad y la derivabilidad de sus campos escalares componentes? Concepto de gradiente de un campo escalar en un punto y concepto de matriz jacobiana de un campo vectorial en un punto.

(b) Justificar la derivabilidad de la función matricial

$$f : M_{2\times 2} \longrightarrow M_{2\times 2},$$

definida por

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto f(X) = \begin{pmatrix} sen\, t \cos x^2 & x + yt \\ log(1 + y^2 + z^2) & \frac{x}{1+x^2+y^2+z^2+t^2} \end{pmatrix}$$

y calcular la derivada matricial $\frac{\partial f}{\partial X}$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial X}(A)$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \pi \end{pmatrix}$.

EXAMEN Lic. Ciencias y Técnicas Estadísticas

Análisis I

(1) (a) Concepto de espacio vectorial.

(b) Enunciar el Teorema de la base, y definir el concepto de dimensión. ¿Cuantos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ de dimensión 7 hay?. Da un ejemplo de un espacio vectorial de dimensión infinita.

(2) (a) Conceptos de espacio normado, y de sucesión convergente y de sucesión de Cauchy en un espacio normado. ¿que relación guardan estos conceptos?. Concepto de espacio de Banach. Conoces algún espacio normado que no sea un espacio de Banach?

(b) Caracteriza las aplicaciones lineales y continuas entre espacios normados. Da un ejemplo de una aplicación lineal entre espacios normados que sea continua, y otro de una que sea discontinua.

(3) (a) Concepto de función derivable entre espacios normados finito-dimensionales. Concepto de derivada direccional. Relación entre ambos conceptos.

(b) Considérense las funciones traza y determinante definidas en matrices de orden 2, esto es, las funciones $f, g : M_{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto f(X) = x + t$$

y

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto g(X) = xt - yz.$$

Justificar la continuidad y la derivabilidad de estas funciones, y en su caso calcular sus derivadas matriciales: $\frac{\partial f}{\partial X}$ y $\frac{\partial g}{\partial X}$

(4) (a) Conceptos de espacio prehilbertiano y espacio de Hilbert.

(b) Enuncia la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y los Teoremas de la proyección ortogonal y de mejor aproximación.

Granada, 22 de Septiembre de 2006.

4

EXAMEN. Lic. Ciencias y Técnicas Estadísticas

Análisis I

(1) (a) Concepto de transformación elemental de filas (resp. columnas). Concepto de matrices equivalentes por filas (resp. columnas). Forma normal de Hermite por filas (resp. columnas) de una matriz.

(b) Concepto de equivalencia de matrices. Relación de dicho concepto con los de equivalencia por filas y equivalencia por columnas. Caracterizar la equivalencia de dos matrices de orden $m \times n$.

(c) Concepto de semejanza de matrices cuadradas. Relación de dicho concepto con el de equivalencia. En la correspondencia entre aplicaciones lineales y matrices ¿cual es la interpretación de la equivalencia de matrices? y ¿cual es la interpretación de la semejanza de matrices cuadradas?

(2) (a) Conceptos de subconjunto abierto y de subconjunto cerrado en un espacio normado. Da ejemplos.

(b) Normas equivalentes. ¿Cómo se refleja la equivalencia de dos normas en las topologías que ambas normas determinan?

(c) Normas clásicas. Demostrar que las normas clásicas en $\mathbb{R}^2$ son equivalentes.

(d) Enunciar el Teorema de Haussdorf. ¿Todas las normas en $\mathbb{R}^2$ son clásicas? ¿Cuantas topologías que preceden de una norma hay en $\mathbb{R}^2$?

(3) (a) Concepto de función componente de un campo vectorial. ¿Qué relación guardan la continuidad y la derivabilidad de un campo vectorial con la continuidad y la derivabilidad de sus campos escalares componentes?

(b) Justificar la derivabilidad de la función matricial

$$f : M_{2\times 2} \backslash \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow M_{2\times 2},$$

definida por

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto f(X) = \begin{pmatrix} sen\, t \cos x^2 & x + yt \\ log(1 + y^2 + z^2) & \frac{x}{x^2+y^2+z^2+t^2} \end{pmatrix}$$

y calcular la derivada matricial $\frac{\partial f}{\partial X}$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial X}(A)$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \pi \end{pmatrix}$.

(c) ¿Admite esta función matricial una extensión continua a $M_{2\times 2}$?

Granada, 20 de Febrero de 2006.

EXAMEN. Lic. Ciencias y Técnicas Estadísticas

Análisis I

(1) (a) Concepto de espacio vectorial.

(b) Conceptos de dependencia e independencia lineal. Conceptos de sistema de generadores, conjunto libre, y base.

(c) Enunciar el Teorema de la base, y definir el concepto de dimensión. ¿Cuantos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n hay?

(2) (a) Conceptos de polinomio característico, valor propio y multiplicidades algebraica y geométrica.

(b) Enunciar los Criterios de diagonalización y de jordanización.

(3) (a) Conceptos de espacio normado y espacio de Banach.

(b) Concepto de subconjunto compacto. Enunciar el Lema y el Teorema de Riesz.

(c) Caracteriza las aplicaciones lineales y continuas entre espacios normados. ¿Que se puede decir de las aplicaciones lineales entre espacios normados si el espacio de salida es finito-dimensional ?

(4) (a) Concepto de función derivable entre espacios normados finito-dimensionales. Concepto de derivada direccional. Relación entre ambos conceptos.

(b) Relacionar los conceptos de derivada y de gradiente de un campo escalar en un punto. Estudiar la derivabilidad del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$$
$$f(0,0) = 0.$$

(c) Justificar la derivabilidad de la función matricial

$$f : M_{2\times2} \longrightarrow M_{2\times3},$$

definida por

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto f(X) = \begin{pmatrix} sen\, t \cos x^2 & sen\, 2t & x+yt \\ e^{x+t} & log(1+y^2+z^2) & 3 \end{pmatrix}$$

y calcular la derivada matricial $\frac{\partial f}{\partial X}$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial X}(A)$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \pi \end{pmatrix}$.

Granada, 13 de Febrero de 2006.

EXAMEN. Lic. Ciencias y Técnicas Estadísticas

Análisis I

(1) (a) Conceptos de polinomio característico, valor propio y multiplicidades algebraica y geométrica. Enunciar los Criterios de diagonalización y de jordanización.

(b) Conceptos de forma bilineal y de forma cuadrática. Clasificación de las formas cuadráticas reales.

(c) Determinar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + 2xz + yz$. Probar que f no alcanza su máximo absoluto.

(2) (a) Concepto de función derivable entre espacios normados finito-dimensionales. Concepto de derivada direccional. Relación entre ambos conceptos.

(b) Relacionar los conceptos de derivada y de gradiente de un campo escalar en un punto. Estudiar la derivabilidad del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) = \tfrac{x}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$$
$$f(0,0) = 0.$$

(c) Justificar la derivabilidad de la función matricial

$$f : M_{2\times 2} \longrightarrow M_{2\times 3},$$

definida por

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto f(X) = \begin{pmatrix} (t+1)^2 & sen2t & x+t \\ e^{x+t} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y calcular $\frac{\partial f}{\partial X}$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial X}(A)$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(3) Conceptos de espacio normado y espacio de Banach. Normas equivalentes. Enuncia los Teoremas de Haussdorf y de Riesz.

(4) Conceptos de espacio prehilbertiano y espacio de Hilbert. Enuncia la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y los Teoremas de la proyección ortogonal y de mejor aproximación.

Granada, 16 de Septiembre de 2005.

EXAMEN. Lic. Ciencias y Técnicas Estadísticas

Análisis I

(1) Concepto de matriz diagonalizable. Concepto de matriz jordanizable. Enunciar los Criterios de diagonalización y de jordanización.

(2) (a) Concepto de función derivable entre espacios normados finito-dimensionales. Concepto de derivada direccional. Relación entre ambos conceptos.

(b) Relacionar los conceptos de derivada y de gradiente de un campo escalar en un punto. Estudiar la derivabilidad del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$$
$$f(0,0) = 0.$$

(c) Justificar la derivabilidad de la función matricial

$$f : M_{2\times 2} \longrightarrow M_{2\times 3},$$

definida por

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto f(X) = \begin{pmatrix} (t+1)^2 & sen2t & x+t \\ e^{x+t} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y calcular $\frac{\partial f}{\partial X}$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial X}(A)$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(3) Conceptos de espacio normado y espacio de Banach. Normas clásicas. Enuncia el Teorema de Riesz.

(4) Concepto de espacio prehilbertiano. Enuncia la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y el Teorema de mejor aproximación.

Granada, 14 de Febrero de 2005.

EXAMEN. Lic. Ciencias y Técnicas Estadísticas

Análisis I

(1) Concepto de matriz diagonalizable. Concepto de matriz jordanizable. Enunciar los Criterios de diagonalización y de jordanización.

(2) (a) Concepto de función derivable entre espacios normados finito-dimensionales. Concepto de derivada direccional. Relación entre ambos conceptos.

(b) Justificar la derivabilidad de la función matricial

$$f : M_{2\times 2} \longrightarrow M_{2\times 3},$$

definida por

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto f(X) = \begin{pmatrix} (t+1)^2 & sen2t & x+t \\ e^{x+t} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y calcular $\frac{\partial f}{\partial X}$.

(3) (a) Conceptos de forma bilineal y de forma cuadrática. Clasificación de las formas cuadráticas reales.

(b) Determinar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + 2xz + yz$. Probar que f no alcanza su máximo absoluto.

(4) Conceptos de espacio normado y espacio de Banach. Normas clásicas. Enuncia el Teorema de Riesz.

(5) Concepto de espacio prehilbertiano. Enuncia la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y el Teorema de mejor aproximación.

Granada, 3 de Febrero de 2005.

EXAMEN. Lic. Ciencias y Técnicas Estadísticas

Análisis I

PARTE I

(1) (a) Conceptos de forma bilineal y de forma cuadrática. Clasificación de las formas cuadráticas reales.

(b) Determinar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + 2xz + yz$. Probar que f no alcanza su máximo absoluto.

(2) (a) Relacionar los conceptos de derivada y de gradiente de un campo escalar en un punto. Estudiar la derivabilidad del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$
$$f(0,0) = 0.$$

(b) Justificar la derivabilidad de la función matricial

$$f : M_{2\times 2} \longrightarrow M_{2\times 2},$$

definida por

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto f(X) = dct(X)\, I_2$$

y calcular $\frac{\partial f}{\partial X}$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial X}(A)$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

PARTE II

(1) Concepto de espacio de Hilbert.

(2) Enunciar el Teorema de la proyección ortogonal.

Granada, 3 de Septiembre de 2004.

EXAMEN. Lic. Ciencias y Técnicas Estadísticas

Análisis I

PARTE I

(1) (a) Conceptos de forma bilineal y de forma cuadrática. Clasificación de las formas cuadráticas reales.

(b) Determinar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^3 + y^3 + 6xy$. Probar que f no alcanza extremos absolutos.

(2) (a) Relacionar los conceptos de derivada y de gradiente de un campo escalar en un punto. Estudiar la derivabilidad del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$$
$$f(0, 0) = 0.$$

(b) Justificar la derivabilidad de la función matricial

$$f : M_{2\times 2} \longrightarrow M_{2\times 2},$$

definida por

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto f(X) = traza(X)\, I_2$$

y calcular $\frac{\partial f}{\partial X}$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial X}(A)$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

PARTE II

(1) Concepto de espacio de Hilbert.

(2) Enunciar el Teorema de la proyección ortogonal.

Granada, 13 de Febrero de 2004.

EXAMEN. Lic. Ciencias y Técnicas Estadísticas

Análisis I

PARTE I

(1) (a) Concepto de matriz diagonalizable. Concepto de matriz jordanizable. Enunciar los Criterios de diagonalización y de jordanización.

(b) Determinar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$. Probar que f no alcanza extremos absolutos.

(2) (a) Relacionar los conceptos de derivada y de gradiente de un campo escalar en un punto. Estudiar la derivabilidad del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$$
$$f(0,0) = 0.$$

(b) Justificar la derivabilidad de la función matricial

$$f : M_{2\times2} \longrightarrow M_{3\times2},$$

definida por

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto f(X) = \begin{pmatrix} (t+x)^2 & \sin 2(x+y) \\ z+t & e^{x+z} \\ \cos y & 3 \end{pmatrix}$$

y calcular $\frac{\partial f}{\partial X}$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial X}(A)$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

PARTE II

(1) Concepto de espacio de Hilbert.

(2) Enunciar el Teorema de la aproximación óptima.

Granada, 26 de Enero de 2004.

EXAMEN. Lic. Ciencias y Técnicas Estadísticas

Análisis I

PARTE I

(1) (a) Conceptos de polinomio característico, valor propio y multiplicidades algebraica y geométrica. Enunciar el criterio de diagonalización.

(b) Determinar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + 2xz + yz$. Probar que f no alcanza su máximo absoluto.

(2) (a) Concepto de función derivable entre espacios normados finito-dimensionales. Concepto de derivada direccional. Relación entre ambos conceptos.

(b) Justificar la derivabilidad de la función matricial

$$f : M_{2\times 2} \longrightarrow M_{2\times 3},$$

definida por

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto f(X) = \begin{pmatrix} (x+y)^3 & sen\, 2y & x+t \\ e^{x+z} & cos\, z & 3\pi \end{pmatrix}$$

y calcular $\frac{\partial f}{\partial X}(A)$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

PARTE II

(1) Definición de espacio métrico, de subconjunto cerrado de un espacio métrico y de subconjunto denso. ¿Es $\mathbb{R}$ un espacio métrico?. ¿Podrías poner ejemplos de cerrados de $\mathbb{R}$? ¿y de subconjuntos densos de $\mathbb{R}$?.

(2) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. ¿Cómo se define la medida exterior $m^*(A)$?. ¿Qué propiedades tiene m^*?. ¿Qué papel desempeña m^* en el espacio de medida de Lebesgue?.

(3) Enunciar el Teorema de la Convergencia Monótona y el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue.

Granada, 12 de Septiembre de 2003.

EXAMEN. Lic. Ciencias y Técnicas Estadísticas

Análisis I

PARTE I

(1) (a) Conceptos de polinomio característico, valor propio y multiplicidades algebraica y geométrica. Enunciar el Criterio de jordanización.

(b) Determinar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Probar que f no tiene extremos absolutos.

(2) (a) Concepto de función derivable entre espacios normados finito-dimensionales. Concepto de derivada direccional. Relación entre ambos conceptos.

(b) Justificar la derivabilidad de la función matricial

$$f : M_{2\times 2} \longrightarrow M_{2\times 3},$$

definida por

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto f(X) = \begin{pmatrix} (t+x)^3 & cos2(t+y) & x+t \\ e^{x+z} & cosz & 3\pi \end{pmatrix}$$

y calcular $\frac{\partial f}{\partial X}$.

PARTE II

(1) Definición de abierto y de cerrado en un espacio métrico. Definición de espacio métrico compacto y de espacio métrico completo.

(2) Definición de σ-álgebra, de medida, y de espacio de medida. Ejemplos de espacios de medida. Definición de función medible y de función integrable respecto de un espacio de medida. Definición del espacio de Lebesgue $L^p(\mu)$ para $1 \leq p < \infty$. Es $L^p(\mu)$ un espacio de Banach?.

(3) Enunciar el Teorema de la convergencia dominada y el Lema de Fatou.

Granada, 20 de Febrero de 2003.

EXAMEN. Lic. Ciencias y Técnicas Estadísticas

Análisis I

PARTE I

(1) (a) Concepto de matriz diagonalizable. Concepto de matriz jordanizable. Enunciar los Criterios de diagonalización y de jordanización.

(b) Averiguar si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable, y en su caso determinar su forma diagonal.

(2) (a) Concepto de función derivable entre espacios normados finito-dimensionales. Concepto de derivada direccional. Relación entre ambos conceptos.

(b) Justificar la derivabilidad de la función matricial

$$f : M_{2\times 2} \longrightarrow M_{2\times 3},$$

definida por

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto f(X) = \begin{pmatrix} (t+1)^2 & sen2t & x+t \\ e^{x+t} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y calcular $\frac{\partial f}{\partial X}$.

PARTE II

(1) Teorema de la aplicación abierta. Otras formulaciones.

(2) Probar que toda aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ es continua.

(3) Calcular la distancia del punto $(0,0,0)$ al plano de ecuación $x + 2y + 2z = 2$ cuando se considera en $\mathbb{R}^3$ la distancia asociada a la norma $\| \cdot \|_p$ para:

1) $p = 1$.

2) $p = 2$.

Granada, 20 de Septiembre de 2002.