ANÁLISIS MATEMÁTICO I
LICENCIATURA EN C.C. y T.T. Estadísticas
Examen final. 09/02/2009.

Primera parte. No se pueden consultar los apuntes.
Tiempo máximo: 1 hora y 15 minutos. Calificación máxima: 4 puntos.

(1) *(1 punto)* Sea A una matriz cuadrada, de orden n, diagonalizable. Razónese detalladamente cómo se calcularía la matriz $\text{sen}A + \cos A$.

(2) *(1 punto)* En el espacio vectorial $C([0,1],\mathrm{R})$, demuéstrese que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ no son equivalentes.

(3) *(0.5 puntos)* Calcúlese una base y la dimensión del espacio vectorial
$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{R}^4 : x_1 = x_2,\ x_2 + x_3 = 0\}.$$

(4) *(0.5 puntos)* Concepto de base hilbertiana en $C([a,b],\mathrm{R})$, con el producto escalar usual.

(5) *(0.25 puntos)* Calcúlese una base y la dimensión del espacio vectorial $P_3(x,y,z)$ (polinomios en las variables x,y,z de grado menor o igual que 2).

(6) *(0.25 puntos)* Concepto de norma en un espacio vectorial V. ¿Cuándo se dice que dos normas dadas son equivalentes?

(7) *(0.25 puntos)* En el espacio vectorial R^n, demuéstrese que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes.

(8) *(0.25 puntos)* Concepto de base hilbertiana en R^n.

Segunda parte. Se pueden consultar los apuntes propios.
Tiempo máximo: 1 h. 45 m. Calificación máxima: 6 puntos.

(1) *(3 puntos)*. Demuéstrese que la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

no es diagonalizable. Encuéntrese su forma canónica de Jordan y calcúlese A^{25}.

(2) *(1 punto)*

Justificar la derivabilidad de la función matricial

$$f : M_{2\times 2} \to M_{2\times 3}$$

definida por

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \to f(X) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^4(t) & \cos(2ty) & 2^{xt} \\ \\ \ln(x^2+t^2+5) & 3 & x^3 e^{t^2} \end{pmatrix}$$

y calcular $\frac{\partial f}{\partial X}$.

Calcular $\frac{\partial f}{\partial X}(A)$, donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(3) *(2 puntos)* En el espacio prehilbertiano $C([0, 2\pi], \mathrm{R})$, con el producto escalar usual, calcúlese la distancia entre las funciones $f(x) = x - 2$, $g(x) = 3\cos x$.