ANÁLISIS MATEMÁTICO I
LICENCIATURA EN C.C. y T.T. Estadísticas
04/02/2008.

(1) **Valor total del ejercicio: 2 puntos (cada apartado, de los 5 que siguen, 0.4 puntos). No se pueden consultar los apuntes. Tiempo máximo: 30 minutos.**

(2) Sean A y B matrices reales de orden $m \times n$ y $p \times q$, respectivamente. Defínase el producto de Kronecker $A \bigotimes B$.
(3) Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal (no idénticamente nula) entre dos espacios vectoriales V y V'. Muéstrese, mediante un ejemplo, que en general f no aplica subconjuntos linealmente independientes de V en subconjuntos linealmente independientes de V'.
(4) Respecto del apartado anterior, escríbase una condición suficiente sobre f que permita garantizar que f aplica subconjuntos linealmente independientes de V en subconjuntos linealmente independientes de V'. Razónese brevemente este apartado.
(5) Sea A una matriz cuadrada, de orden n, diagonalizable. Razónese cómo se calcularía la matriz e^A.
(6) Sea A una matriz cuadrada real de orden 4, con dos valores propios λ_1 y λ_2, dobles. Escríbanse todas las posibilidades para la forma canónica de Jordan de A, expresando para cada caso las multiplicidades algebraicas y geométricas de λ_1 y λ_2.

(1) **Valor total del ejercicio: 2 puntos (cada apartado, de los 5 que siguen, 0.4 puntos). No se pueden consultar los apuntes. Tiempo máximo: 30 minutos.**

(2) Si H es un espacio vectorial real con un producto escalar, ¿qué propiedad es la que decide que H sea un espacio de Hilbert?
(3) Escribe dos ejemplos de espacio de Hilbert, uno de dimensión finita y otro de dimensión infinita, indicando el producto escalar en cada caso.
(4) Respecto del apartado anterior, escribe, para cada ejemplo, una base hilbertiana del espacio de Hilbert considerado.
(5) En R^n con la métrica euclídea usual, indica tres subconjuntos, el primero abierto, el segundo cerrado y el tercero ni abierto ni cerrado.
(6) Si H es un espacio vectorial con un producto escalar, enuncia y demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

(1) **Valor total del ejercicio: 3 puntos. Se pueden consultar los apuntes propios. Tiempo máximo: 1 h.**

(2) (1 punto) Sea $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$ una aplicación lineal tal que $f(2,1) = (1,0,1),\ f(-3,4) = (0,1,1)$. Calcúlese razonadamente la matriz de f asociada a las bases canónicas de R^2 y R^3.

(3) (2 puntos) Escríbase la forma cuadrática asociada a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizar dicha forma cuadrática y clasificarla.

(1) **Valor total del ejercicio: 3 puntos. Se pueden consultar los apuntes propios. Tiempo máximo: 1 h.**

(2) (1.5 puntos). Demuéstrese que el conjunto

$$B = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{sen}(nx),\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

es un conjunto ortonormal de $L^2(0,\pi)$. Suponiendo que el conjunto dado B es base hilbertiana, calcúlense las coordenadas de las funciones $f(x) = \mathrm{sen} 5x$ y $g(x) = \cos x$ respecto de la base B (las integrales que aparezcan en la expresión de las coordenadas se han de resolver).

(3) (1.5 puntos) En el espacio $C([2,5], \mathrm{R})$, con la norma uniforme, propóngase el límite de la sucesión de funciones $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{2nx+3}$. Demuéstrese rigurosamente que la función propuesta es el límite de $\{f_n\}$.