ANÁLISIS MATEMÁTICO I
LICENCIATURA EN C.C. y T.T. Estadísticas
21/01/2008.

(1) **Valor total del ejercicio: 4 puntos (cada apartado, de los 10 que siguen, 0.4 puntos). No se pueden consultar los apuntes. Tiempo máximo: 60 minutos.**

(2) Sea H un espacio vectorial real. Definición (propiedades) de producto escalar en H.
(3) Definición y propiedades de la norma derivada de un producto escalar.
(4) Definición y propiedades de la distancia derivada de una norma.
(5) ¿Qué relación hay entre los conceptos espacio de Hilbert, espacio normado y espacio métrico?
(6) Si H es un espacio vectorial real con un producto escalar, ¿qué propiedad es la que decide que H sea un espacio de Hilbert?. Coméntala brevemente (máximo tres líneas).
(7) Escribe dos ejemplos de espacio de Hilbert, uno de dimensión finita y otro de dimensión infinita, indicando el producto escalar en cada caso.
(8) ¿Qué relación hay entre los conceptos espacio normado, normas equivalentes y dimensión finita?.
(9) Definición de subconjunto abierto y subconjunto cerrado de un espacio métrico. En R^2 con la métrica euclídea usual, indica tres subconjuntos, el primero abierto, el segundo cerrado y el tercero ni abierto ni cerrado.
(10) En un espacio métrico, defínase el concepto de sucesión de Cauchy y sucesión convergente. ¿Qué relación hay entre ambos conceptos?.
(11) ¿Cuál es la propiedad que decide que un espacio métrico sea completo?. Coméntala brevemente (máximo 3 líneas).

(1) **Valor total del ejercicio: 6 puntos. Se pueden consultar los apuntes propios. Tiempo máximo: 1 h. 30 minutos.**

(2) 1.5 puntos. Demuéstrese que el conjunto

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nx),\ n \in \mathbb{N} \right\} \tag{1}$$

es un conjunto ortonormal de $L^2(0,\pi)$.

(3) 1 punto. Suponiendo que el conjunto dado es una base de $L^2(0,\pi)$, escríbase la expresión de cualquier elemento $f \in L^2(0,\pi)$, en función de dicha base.

(4) 1 punto. ¿Cuáles son las coordenadas de f respecto de la base B?

(5) 1 punto. Exprésese la norma de f en función de sus coordenadas.

(6) 1.5 puntos. Aplíquese lo anterior para calcular las coordenadas de la función $f(x) = \text{sen} x$ respecto de la base B anterior (las integrales que aparezcan en la expresión de las coordenadas se han de resolver).