



ANÁLISIS MATEMÁTICO I
LICENCIATURA EN C.C. y T.T. Estadísticas
Tercer examen parcial. 20/01/2009.

Primera parte. No se pueden consultar los apuntes. Tiempo máximo: 30 minutos. Cada apartado vale 0.5 puntos.

- (1) Concepto de producto escalar y espacio prehilbertiano. Demuéstrese que en cualquier espacio prehilbertiano puede definirse una norma y que en cualquier espacio normado puede definirse una distancia.
- (2) Concepto de normas equivalentes en un espacio normado V . ¿Son siempre dos normas distintas equivalentes? Póngase de manifiesto alguna propiedad del espacio V que permita afirmar que todas las normas definidas en el mismo son equivalentes.
- (3) Concepto de base hilbertiana en un espacio prehilbertiano. Escribese el desarrollo de Fourier asociado a una base hilbertiana.
- (4) Enunciado y demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Segunda parte. Se pueden consultar los apuntes propios. Tiempo máximo: 1 h. 15 m.

Valor total del ejercicio: 5 puntos.

(1) *1.5 puntos.* Demuéstrese que el conjunto

$$(1) \quad B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nx), n \in \mathbb{N} \right\}$$

es un conjunto ortonormal de $L^2(0, \pi)$.

(2) *1 punto.* Suponiendo que el conjunto dado es una base hilbertiana de $L^2(0, \pi)$, escribase el desarrollo de Fourier de cualquier elemento $f \in L^2(0, \pi)$, en función de dicha base.

(3) *2.5 puntos.* Calcular el desarrollo de Fourier de la función $f(x) = \operatorname{sen}x$ respecto de la base B .

Valor total del ejercicio 3 puntos.

Sea el espacio vectorial $C([0, \pi/2], \mathbb{R})$ y considérese el elemento $h(x) = \operatorname{sen}x - \cos x$.

(1) *1 punto* Calcúlese $\|h\|_1$.

(2) *1 punto* Calcúlese $\|h\|_\infty$.

(3) *1 punto* Calcúlese $\|h\|_2$.