



**ANÁLISIS MATEMÁTICO I**  
**LICENCIATURA EN C.C. y T.T. Estadísticas**  
Tercer examen parcial. 20/01/2009.

**Primera parte. No se pueden consultar los apuntes. Tiempo máximo: 30 minutos. Cada apartado vale 0.5 puntos.**

- (1) Concepto de producto escalar y espacio prehilbertiano. Demuéstrese que en cualquier espacio prehilbertiano puede definirse una norma y que en cualquier espacio normado puede definirse una distancia.
- (2) Concepto de normas equivalentes en un espacio normado  $V$ . ¿Son siempre dos normas distintas equivalentes? Póngase de manifiesto alguna propiedad del espacio  $V$  que permita afirmar que todas las normas definidas en el mismo son equivalentes.
- (3) Concepto de base hilbertiana en un espacio prehilbertiano. Escribese el desarrollo de Fourier asociado a una base hilbertiana.
- (4) Enunciado y demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

**Segunda parte. Se pueden consultar los apuntes propios. Tiempo máximo: 1 h. 15 m.**

*Valor total del ejercicio: 5 puntos.*

(1) *1.5 puntos.* Demuéstrese que el conjunto

$$(1) \quad B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nx), n \in \mathbb{N} \right\}$$

es un conjunto ortonormal de  $L^2(0, \pi)$ .

(2) *1 punto.* Suponiendo que el conjunto dado es una base hilbertiana de  $L^2(0, \pi)$ , escribese el desarrollo de Fourier de cualquier elemento  $f \in L^2(0, \pi)$ , en función de dicha base.

(3) *2.5 puntos.* Calcular el desarrollo de Fourier de la función  $f(x) = \operatorname{sen}x$  respecto de la base  $B$ .

*Valor total del ejercicio 3 puntos.*

Sea el espacio vectorial  $C([0, \pi/2], \mathbb{R})$  y considérese el elemento  $h(x) = \operatorname{sen}x - \cos x$ .

(1) *1 punto* Calcúlese  $\|h\|_1$ .

(2) *1 punto* Calcúlese  $\|h\|_\infty$ .

(3) *1 punto* Calcúlese  $\|h\|_2$ .