V. Diferenciabilidad de funciones de varias variables. Extremos relativos.

1. Calcúlese el vector gradiente en un punto arbitrario (x, y) de la función f en cada uno de los siguientes casos:

   a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   b) $f(x, y, z) = x^{y+z}, \forall x \in \mathbb{R}^+, y, z \in \mathbb{R}$

   c) $f(x, y, z) = (x + y)^z, \forall x, y \in \mathbb{R}^+, z \in \mathbb{R}$

2. Dése un ejemplo de una función de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$ $(N > 1)$ que sea continua en un punto, pero que no sea diferenciable en él.

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y, z) = (3x - 2y + z, x + 3y - 2z)$ $, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pruébese que f es diferenciable en cualquier punto de $\mathbb{R}^3$ y obténgase el jacobiano y la diferencial de la función en $(1, 1, 1)$.

4. Estúdiese la diferenciabilidad de las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}^2$:

   a) $f(x, y) = x^3 + xy - y^2$

   b) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2y^2}$

   c) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$

5. Estúdiese la diferenciabilidad en el origen de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

   $$f(x, y) = (e^{x+y}, \operatorname{sen}(x - y), x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0$$

   $$f(0, y) = (e^y, \operatorname{sen}(-y), 0)$$

   Calcúlese, en el caso de que exista, la derivada en el origen.

6. Supongamos que un pato nada siguiendo la circunferencia de ecuación $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t$ (t es el tiempo) y que la temperatura sobre la superficie del agua viene dada por $T(x, y) := x^2e^y - xy^3$. Calcúlese dT/dt (el cambio de temperatura por unidad de tiempo que el pato notaría):

   a) Usando la regla de la cadena

   b) Expresando T en función de t y derivando

7. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable. Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = f(x^2y)$. Pruébese que

   $$x\frac{\partial g}{\partial x} = 2y\frac{\partial g}{\partial y}.$$

8. Sea $h(x, y, z) = f(x^2 + 2yz, y^2 + 2xz), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ con $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Pruébese que:

   $$(y^2 - xz)\frac{\partial h}{\partial x} + (x^2 - yz)\frac{\partial h}{\partial y} + (z^2 - xy)\frac{\partial h}{\partial z} = 0.$$

9. Sean f y g dos funciones reales de variable real, derivables en $\mathbb{R}$. Se define la función de dos variables $z(x,y) = x^2yf(u) + xy^2g(v)$, con $u = \frac{x}{y}$, $v = \frac{y}{x}$. Calcúlese $x\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)$.

10. Una función f definida en un abierto A del plano se dice que es **armónica** si
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in A$$
en todo punto de su dominio. ¿Son armónicas las siguientes funciones?
    a) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}(\frac{x}{y}) \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0): \ x \in \mathbb{R}\}$.
    b) $g(x,y) = e^{-x}\cos y + e^{-y}\cos x \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
    c) $h(x,y) = \dfrac{e^{x+y}}{x^2+y^2} \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

11. Estúdiese si el punto $(0,0)$ es un extremo de $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos:
    a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ y $A = \mathbb{R}^2$.
    b) $f(x,y) = |x| + |y|$ y $A = [-1,1] \times [-1,1]$
    c) $f(x,y) = |x| + y$ y $A = [-1,1] \times [-1,1]$

12. Consideremos las funciones reales f y g dadas por:
    a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
    b) $g(x,y,z) = (x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)} \ \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

    Se pide:
    a) Calcúlense los puntos críticos.
    b) Calcúlese la matriz hessiana en los puntos críticos.
    c) Estúdiese la existencia de extremos relativos.

13. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos parámetros, y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de dos variables reales dada por $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$. Estúdiese la existencia de extremos de f en función de los parámetros.

14. Calcúlense los extremos relativos de los siguientes campos escalares. Estúdiese, cuando sea posible, si dichos extremos son absolutos o no lo son.
    a) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - x^2 + 3y^2$.
    b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.
    c) $f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4$.
    d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy \quad (a > 0)$
    e) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2+1}$
    f) $f(x,y) = (x^2+2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.
    g) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x\,y)$.
    h) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2xz - xy$.
    i) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$.
    j) $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3xy^2$.