IV. Funciones derivables de una variable.

1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones en sus respectivos dominios de definición:

(a) $f(x) = \operatorname{sen}^2(3x)$ (b) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

(c) $f(x) = \dfrac{\ln(2+3e^x)}{\sqrt{2+3x^2}}$ (d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(e) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^a}, \quad a \in \mathbb{R}$ (f) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x) + \operatorname{arc\,cos}(x)$

(g) $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (h) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

(i) $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{\sqrt{x}}$ (j) $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\ln(x)}$

(k) $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x+1}) - \operatorname{sen}(\sqrt{x})$ (l) $f(x) = \log_a(1+\tan^2(x))$

(m) $f(x) = x^{\operatorname{sen}(x)}$ (n) $f(x) = \arctan(x) - \dfrac{x}{1+x^2}$

2. Dada una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, estúdiese la continuidad y la derivabilidad en cada uno de los siguientes casos:

a) $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$.
b) $A = [-1, 1]$ y $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
c) $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = \frac{2x}{1+|x|}$.
d) $A = \mathbb{R}_0^+$ y $f(x) = x^x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(0) = 0$

3. **La ley del enfriamiento de Newton.** Supongamos que tenemos un cuerpo a temperatura T_1 en un ambiente a temperatura T_a. Obviamente, el cuerpo va adquiriendo poco a poco la temperatura del ambiente. La ley de Newton dice que la velocidad de cambio de temperatura del cuerpo es proporcional a $-(T(s) - T_a)$, donde $T(s)$ es la temperatura del cuerpo en el tiempo s (medido en horas, por ejemplo). Dicho de otro modo, $T'(s) = -\lambda(T(s) - T_a)$. Estamos ante lo que se llama una ecuación diferencial. Verificar que la función $T(s) = T_a + (T_1 - T_a)e^{-\lambda s}$ verifica dicha ecuación diferencial. Ésta es, por tanto, la función del cambio de temperatura.

   Si, en un caso concreto, $T_a = 0$, $T_1 = 37$, $\lambda = 0{,}05$, ¿cuánto tiempo transcurrirá hasta que la temperatura del cuerpo sea 30?

4. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Encuéntrense los valores de α y β que hacen que el punto $(2, 4)$ pertenezca a la gráfica de f y que la recta tangente a la misma en dicho punto sea la recta de ecuación $2x - y = 0$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estúdiese la continuidad y derivabilidad de f y calcúlese su imagen.

6. Calcúlese la imagen de las siguientes funciones:

   a) $f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \operatorname{arctg} x, \quad \forall x \in [0,1].$
   b) $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x-1}{x(x+1)}, \quad \forall x \in]0,1[.$
   c) $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad \forall x \in [-1,1].$
   d) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x}{1+|x|}, \quad \forall x \in [-1,1].$
   e) $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = x(1-x^2)^{-1/2}.$

7. Demuéstrense las siguientes desigualdades:

   a) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \forall x \in \mathbb{R}^+..$
   b) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \forall x \in]0, \pi/2[$
   c) $\frac{2x}{\pi} < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x, \quad \forall x \in]0, \pi/2[$

8. Calcúlese el número de ceros y la imagen de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^6 - 3x^2 + 2 \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

9. Calcúlese el número de soluciones de la ecuación $3 \ln x - x = 0$.

10. Sea $a > 1$. Pruébese que la ecuación $x + e^{-x} = a$ tiene, al menos, una solución positiva y otra negativa.

11. Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = x + \ln x + \arctan x.$$

Pruébese que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución.

12. Pruébese que la ecuación

$$x + e^x + \arctan x = 0$$

tiene una única raíz real. Dése un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

13. Pruébese que la ecuación $\operatorname{tg}(x) = x$ tiene infinitas soluciones.

14. Calcúlese la imagen de la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^{1/x}$.

15. Sea $f : [-1/2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x + e^x)^{1/x} \quad (x \neq 0) \quad f(0) = e^2$. Estúdiese la continuidad y derivabilidad de f en cero.

16. Sea $f : \mathbb{R} \backslash \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$$

Estúdiese la continuidad de f y su comportamiento en el punto 1, en $+\infty$ y en $-\infty$.

17. Estúdiese el comportamiento de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

a)

$$A =]2, +\infty[\ , \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}} \qquad \forall x \in A, \quad \alpha = 2.$$

b)

$$A = \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}, \qquad f(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \qquad \forall x \in A, \quad \alpha = 1.$$

c)

$$A =]0, \pi/2[, \qquad f(x) = (1 + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{cotg} x}, \qquad \alpha = 0$$

e)

$$A =]0, \pi/2[, \qquad f(x) = (\frac{1}{\operatorname{tg} x})^{\operatorname{sen} x}, \qquad \alpha = \pi/2$$

f)

$$A = \mathbb{R}^+ \backslash \{e\}, \qquad f(x) = x^{\frac{1}{\ln x - 1}}, \qquad \alpha = e.$$

g)

$$A = \mathbb{R}^+, \qquad f(x) = \frac{1}{x}(e - (1+x)^{\frac{1}{x}}), \qquad \alpha = 0$$

18. Estúdiese el comportamiento en el punto cero de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

a)

$$A =]0, \pi/2[, \qquad f(x) = (\frac{1}{\operatorname{tg} x})^{\operatorname{sen} x},$$

b)

$$A = \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}, \qquad \forall x \in A.$$

c)

$$A = \mathbb{R}^+ \backslash \{e\}, \qquad f(x) = x^{\frac{1}{\ln(x-1)}}.$$

d)

$$A =]0, \pi/2[, \qquad f(x) = \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \qquad \forall x \in A$$

e)

$$A =]0, \pi/2[, \qquad f(x) = (1 - \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x^2}}, \qquad \forall x \in A$$

f)

$$A = \mathbb{R}^+, \qquad f(x) = x^{\operatorname{sen} x}, \qquad \forall x \in A$$

g)

$$A =]0, \pi/2[, \qquad f(x) = \frac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{\operatorname{sen}^3 x}, \qquad \forall x \in A$$

h)

$$A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}, \qquad \forall x \in A.$$

19. Sea $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{\ln(1 - \operatorname{sen} x) - 2\ln(\cos x)}{\operatorname{sen} x} \qquad (x \neq 0) \qquad f(0) = a.$$

Estúdiese para qué valor de a la función f es continua en cero.

20. Estúdiese el comportamiento en $+\infty$ de las funciones $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

a)
$$A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \frac{\ln(2 + 3e^x)}{\sqrt{2 + 3x^2}},$$

b)
$$A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = (a^x + x)^{1/x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad a \in \mathbb{R}^+,$$

c)
$$A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\ln x}.$$

d)
$$A = \mathbb{R} \backslash \{e\}, \quad f(x) = x^{\frac{1}{\ln x - 1}}.$$

e)
$$A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$$

21. Calcúlense las derivadas de las funciones hiperbólicas.

22. Pruébese que si $f(x) = \operatorname{sen} x$, se verifica que

$$f^{n)}(x) = \operatorname{sen}\Big(x + n\frac{\pi}{2}\Big), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

23. Pruébese que la función logaritmo es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^+$ y calcúlese, para cada $n \in \mathbb{N}$, la derivada n-ésima.

24. Calcúlese, haciendo uso de un desarrollo de Taylor conveniente, un valor aproximado del número real α con un error menor de r en cada uno de los casos siguientes:

a) $\alpha = \sqrt{e} = e^{1/2}, \; r = \dfrac{1}{100}$ **b)** $\alpha = \operatorname{sen}\dfrac{1}{2}, \; r = \dfrac{1}{100}$ **c)** $\alpha = \sqrt[3]{7}, \; r = \dfrac{1}{10}$

25. Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón, quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hállense las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse con ese procedimiento si el rectángulo tiene como lados **(a)** 10 y 10, **(b)** 12 y 18.

26. Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcúlense las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.

27. Se inscribe un rectángulo en la elipse $x^2/400 + y^2/225 = 1$ con sus lados paralelos a los ejes. Hállense las dimensiones del rectángulo para que **(a)** el área sea máxima, **(b)** el perímetro sea máximo.

28. Demuéstrese que la suma de un número positivo y su inverso es mayor o igual a 2 y, por tanto, es mínima para el punto 1. ¿Tiene máximo la suma anterior?

29. Hállense las dimensiones del cilindro de mayor volumen entre todos aquellos que tienen la superficie lateral total constante.

30. Se desea construir un envase cilíndrico de con un volumen fijo V_0. Calcúlense las dimensiones (radio y altura) que ha de tener el envase para que la cantidad de material invertido en construirlo, incluyendo las tapas, sea mínimo.