III. Topología de $\mathbb{R}^N$. Continuidad y límite funcional.

1. Pruébense que para cualesquiera vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ se verifica la siguiente igualdad para la norma euclídea, conocida como la identidad del paralelogramo:
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \ .$$

2. Descríbanse el interior, la adherencia, el conjunto de puntos de acumulación y la frontera de los siguientes conjuntos:

   a) $\mathbb{N}$
   b) $\mathbb{Q}$
   c) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
   d) $[0,1] \ \cup \ \{2\}$
   e) $\{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$
   f) $A = \{(x_n, y_n) : \ x_n = \frac{20}{n}, y_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}\}$
   g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = rx\} \quad (r \in \mathbb{R})$
   h) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} \quad (0 < a < b)$
   i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\} \quad (0 < a < b < c)$
   j) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\} \quad (0 < a < b)$

3. Díganse cuáles de los siguientes conjuntos son compactos:

   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq 2\}$
   b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < x \leq 2, \ 0 \leq y \leq 2\}$
   c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 2\}$
   d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 2\}$
   e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 2\}$
   f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \geq 2\}$

4. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Supongamos que existe un número real positivo a tal que $f(x) = f(x+a), \forall x \in \mathbb{R}$. Pruébese que si f tiene límite en $+\infty$ o en $-\infty$, entonces f es constante. ¿Tienen las funciones seno y coseno límites en $+\infty$ y en $-\infty$?
   Indicación: Pruébese previamente que $f(x) = f(x+na), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$.

5. Estúdiense los siguientes límites funcionales:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2+3e^x}{\sqrt{2+3x^2}}, \qquad \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x + 1)^{1/x},$$
$$\lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{sen} x)^{\operatorname{cotg} x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cosec} x}.$$

6. Sean a, b dos números reales verificando $b < 0 < a$; estúdiese el comportamiento en cero de las funciones $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \arctan \frac{a}{x} - \arctan \frac{b}{x}, \quad g(x) = xf(x).$$

7. Estúdiese la existencia de límite en 0, $+\infty$ y $-\infty$ de la función $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{|x|}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$.

8. Estúdiese la continuidad y el comportamiento en $+\infty$ y en $-\infty$ de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en cada uno de los casos siguientes

   a) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

   b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} \big(1+|x|\big)^{\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

9. Dénse ejemplos de funciones f que verifican las siguientes condiciones:

   a) f es continua y su imagen no es un intervalo.

   b) f está definida en un intervalo, su imagen es un intervalo y f no es continua.

   c) f es continua en todo $\mathbb{R}$, no constante y su imagen es un conjunto (obligatoriamente un intervalo) acotado.

   d) f es continua en $[0, 1[$ y $f([0, 1[)$ no es acotado.

   e) f está definida en un intervalo abierto acotado y su imagen es un intervalo cerrado y acotado.

10. ¿Puede existir una función definida en todo $\mathbb{R}$, continua en un punto x, y que no tenga signo constante en ningún intervalo centrado en dicho punto?

11. Para cada una de las siguientes funciones polinómicas f, hállese un número entero n tal que $f(x) = 0$ para algún número real x entre n y $n + 1$.

    i) $f(x) = x^3 + x + 3$

    ii) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$

    iii) $f(x) = x^5 + x + 1$

    iv) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

12. Pruébese que todo polinomio de grado impar admite al menos una raíz real.

13. Sea P un polinomio de grado n tal que el término independiente y el coeficiente líder tienen signo opuesto. Pruébese que P tiene al menos una raíz positiva.

14. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ una función continua en $[0, 1]$. Pruébese que f tiene un punto fijo, es decir, pruébese que existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

15. Suponiendo que la temperatura varía de manera continua a lo largo del Ecuador, pruébese que, en cualquier instante, existen dos puntos antípodas sobre el Ecuador que se hallan a la misma temperatura.

16. Un corredor recorre 6 kilómetros en 30 minutos. Pruébese que existe un intervalo de 5 minutos seguidos a lo largo del cual el corredor recorre exactamente 1 kilómetro.

17. Un escalador comienza, desde su campamento base, a subir a una montaña el sábado a las 7 horas, alcanzando la cima a las 8 de la tarde. A las 7 horas del domingo inicia el descenso hacia el campamento base tardando el mismo tiempo que le costó la subida. Demuéstres que existe una determinada hora, a lo largo del domingo, en la que el escalador se encuentra exactamente a la misma altura que a esa misma hora del sábado.

18. Sean $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = x, \forall x \in]0,1[$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{si } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ \frac{x}{1-x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^-. \end{cases}$$

Compruébese que f y g son continuas y acotadas pero no tienen máximo ni mínimo absolutos.

19. Supongamos que $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ es una una aplicación lineal. Justifíquese que f es continua en $\mathbb{R}^N$. Deducir que existe $K > 0$ tal que

$$\|f(x)\| \leq K\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \ .$$

20. Determínese el dominio de las siguientes funciones de dos variables y calcular el límite de cada una de ellas en $(0,0)$:

   a) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
   b) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
   c) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$
   d) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$
   e) $f(x,y) = x \operatorname{sen} \frac{1}{y}$
   f) $f(x,y) = \frac{y}{x+2y}$
   g) $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
   h) $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$
   i) $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$
   j) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   k) $f(x,y) = (x+y^2)\operatorname{sen}(\frac{1}{xy})$
   l) $f(x,y) = \frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   m) $f(x,y) = \frac{x^4+2x^2y^2+3xy^3}{(x^2+y^2)^2}$
   n) $f(x,y) = x\ y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
   ñ) $f(x,y) = \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

21. Estúdiese la continuidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^2+y^2}, \operatorname{sen}(xy) \right), & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ (0,0), & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$