II. Ejercicios (Sucesiones y series de números reales)

1. Pruébese que si $\{x_n\} \longrightarrow x$, entonces $\{|x_n|\} \longrightarrow |x|$. ¿Es cierto el recíproco?

2. Pruébse que si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son dos sucesiones acotadas, $\{x_n + y_n\}$ y $\{x_n y_n\}$ también lo son.

3. Probar que si $|x| < 1$, entonces la sucesión $\{x^n\}$ converge a cero, mientras que si $|x| > 1$ la sucesión $\{|x^n|\}$ diverge positivamente.

4. Estúdiese la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ en los siguientes casos:

   a) $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   b) $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   c) $x_n = \frac{3n+2}{4n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   d) $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \dfrac{4 + 3x_n}{3 + 2x_n} \quad (n \in \mathbb{N})$.
   e) $x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \dfrac{1}{4}(x_n^2 + 3) \quad (n \in \mathbb{N})$.

5. Si $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales que converge a cero y $a_n \neq 0, \forall n$, pruébese que

$$\text{lím}\left\{\frac{\sqrt{1 + a_n} - 1}{a_n}\right\} = \frac{1}{2} .$$

6. Dénse ejemplos de sucesiones de números reales verificando las siguientes condiciones

   a) convergente a cero, no sea monótona y todos los términos son positivos.
   b) no acotada que admita una subsucesión convergente.

7. Estúdiese la convergencia de las siguientes sucesiones:

   a) $\{\text{sen}(n)/n\}$.
   b) $\left\{\dfrac{\cos(n^2+1)}{n}\right\}$.
   c) $\{n^p c^n\} \quad (p > 0, |c| < 1)$
   d) $\left\{\frac{c^n}{n!}\right\} \quad (c \in \mathbb{R})$
   e) $\left\{\frac{n^p}{n!}\right\} \quad (p > 0)$
   f) $\{\sqrt[n]{n}\}$ (Úsese la desigualdad $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq \dfrac{n - 2 + 2\sqrt{n}}{n}$)
   g) $\left\{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n+1}{n^2}\right\}$.
   h) $\left\{\frac{1! + 2! + \cdots n!}{n!}\right\}$.

i) $\left\{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n^2}\right\}$.

j) $\left\{\frac{\ln(n)}{1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}}\right\}$.

k) $\left\{(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}\right\} \qquad (a,b\in\mathbb{R}^+)$.

l) $\left\{\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}\right\}$.

m) $\left\{\sqrt[n]{n+3}-\sqrt[n]{n}\right\}$.

8. Se definen las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ por recurrencia como sigue:

$$a_1=2, b_1=1, \quad a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}, \qquad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}, \quad (n\in\mathbb{N})\ .$$

Pruébese que ambas sucesiones convergen y tienen el mismo límite.

9. Estúdiese la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{1}{n2^n}$

b) $\sum 2^n$

c) $\sum \frac{\ln(n)}{n}$.

d) $\sum \frac{1}{2n-1}$.

e) $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$.

f) $\sum (-1)^n \frac{2n-1}{2^n}$.

g) $\sum \frac{2^n}{n}$.

h) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$.

i) $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$.

j) $\sum \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$.

k) $\sum \frac{1}{n!}$.

l) $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

m) $\sum (-1)^n \frac{1}{\ln(n)}$.

n) $\sum \frac{n^n}{e^{n^2+1}}$.

o) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$

p) $\sum \left(\sqrt[n]{2}-1\right)^n$

q) $\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^3}}$

v) $\sum \frac{1}{n^{1+1/n}}$

r) $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$

s) $\sum \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$

t) $\sum a^{\ln n} \quad (a>0)$

u) $\sum \frac{1}{n^{1+1/n}}$

10. Estúdiese el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\sum \frac{x^n}{n!}$

b) $\sum \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} x^n$

c) $\sum n^\alpha x^n \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

d) $\sum \frac{n^n}{n!} x^n$

e) $\sum \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{5 \cdot 10 \cdots 5n} x^n$

f) $\sum \frac{x^n}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}$

g) $\sum n! x^n$

h) $\sum \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n x^n$

i) $\sum \frac{1}{n!} (x+7)^n$