II. Ejercicios (Aplicaciones lineales. Matrices.)

1. Estudiar si las siguientes aplicaciones son ó no lineales:

   a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2x + 2, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
   b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = 2x - 3y, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
   c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x, y) = (xy, x - 2y), \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
   d) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $f(x, y, u, v) = (2x, x + y, x - 2u), \ \forall (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$
   e) $f : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_3$ $f(p(x)) = 2p(x) + p'(x), \ \forall p \in \mathcal{P}_3$, donde $\mathcal{P}_3$ es el espacio de polinomios (con coef. reales) en una variable de grado menor ó igual que 3.

   En los casos en que la aplicación sea lineal, determinar el núcleo y la imagen y dar una base de ambos subespacios.

2. Sea la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

   $$T(x, y, z) = (x - y + 2z, x + 3y), \qquad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$

   y se consideran las bases de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^2$ dadas por

   $$B_1 := \{(1, 0, -1), (2, 1, 0), (0, 1, 1)\}, \qquad B_2 := \{(-2, 1), (1, -1)\}$$

   Se pide:

   a) Matriz asociada a T respecto de las bases canónicas en ambos espacios.
   b) Matriz asociada a T respecto de la base B_1 en $\mathbb{R}^3$ y la canónica en $\mathbb{R}^2$.
   c) Matriz asociada a T respecto de la base canónica en $\mathbb{R}^3$ y B_2 en $\mathbb{R}^2$.
   d) Matriz asociada a T respecto de la base B_1 en $\mathbb{R}^3$ y B_2 en $\mathbb{R}^2$.

3. Se considera la matriz

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   y las bases $B_1 = \{(2, 1), (1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $B_2 := \{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (-1, -2, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Se pide:

   a) Hallar la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ que tiene como matriz A respecto de las bases canónicas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$.
   b) Hallar la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ que tiene como matriz A respecto de la base B_1 en $\mathbb{R}^2$ y B_2 en $\mathbb{R}^3$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal tal que

   $$\begin{array}{l} f(3, -5) = (1, 1, 1, 1) \\ f(-1, 2) = (2, 1, 0, -2) \end{array} .$$

   a) Hallar la expresión de la aplicación f.
   b) Matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$.
   c) Determinar el subespacio imagen de la aplicación lineal y su dimensión.

5. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calcular las matrices $B+C$, AB, BA, $A(B+C)$, $A(2B-3C)$. ¿Se puede calcular $A+C$ ó BC?

6. Comprobar que las identidades algebraicas siguientes no son ciertas en general para matrices A y B de orden n:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + A^2, \qquad (A+B)(A-B) = A^2 - B^2 .$$

Obtener expresiones de $(A+B)^2$ y $(A+B)(A-B)$ que sí sean ciertas.

7. Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ las aplicaciones lineales dadas por

$$f(x,y,z) = (x, x+y, y+z), \qquad g(x,y,z) = (y, 2z-x, x-y), \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3) .$$

a) Hallar las matrices asociadas respecto de la base canónica en $\mathbb{R}^3$.

b) Calcular las aplicaciones $f+g$, $3g$, $g \circ f$, $f \circ g$ y las matrices asociadas.

c) ¿Qué relación existe entre las matrices asociadas a las cuatro aplicaciones anteriores y las asociadas a f y a g?

8. Calcular por el procedimiento de Gauss-Jordan las inversas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

9. Aplicar el método de Gauss-Jordan para calcular la inversa de una matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que verifique $ab - cd \neq 0$.

10. Sea $A \in \mathcal{M}_m, D \in \mathcal{M}_n, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $C \in \mathcal{M}_{n\times m}$. Se considera la matriz cuadrada E de orden $p = m+n$

$$E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} .$$

Supongamos que $\mathrm{rg}\,(A) = m$ y que $\mathrm{rg}\,(D) = n$, ¿es cierto que E tiene rango p? En caso afirmativo, probarlo; dar un contraejemplo en caso negativo.