2. Singularidades aisladas. Teorema de los residuos.

1. Sea f una función holomorfa en un entorno reducido de un punto a ($D(a,r)\setminus\{a\}$) que no se anula en dicho entorno. ¿Qué relación existe entre las posibles singularidades en a de las funciones f y $\frac{1}{f}$?

2. Supongamos que f y g son holomorfas en un entorno de un punto a; que $f(a) \neq 0$ y que g tiene un cero aislado de orden 2 en a. Prueba que
$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}, a\right) = 2\,\frac{f'(a)}{g''(a)} - \frac{2}{3}\,\frac{f(a)g^{3)}(a)}{(g''(a))^2}$$

3. Justifica que la suma de los residuos de una función racional, incluyendo el residuo en ∞, es igual a 0.
Indicación: Usa que la función racional se descompone como suma de un polinomio y una suma finita, donde, por cada cero del denominador a_k de orden m_k aparecen m_k sumandos del tipo $\dfrac{A_{k,i}}{(z-a_k)^i}$ para $1 \leq i \leq m_k$ ($A_{k,i}$ es un número complejo).

4. Calcúlense las siguientes integrales, usando el Teorema de los residuos:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2x}{5-4\cos x}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x}{5-3\cos 2x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5\cos^2 t+4}\,dt$

e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{15\operatorname{sen}^2 t+1}\,dt$

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{3\cos^2 t+2\operatorname{sen}^2 t}{9\cos^2 t+4\operatorname{sen}^2 t}\,dt$

g) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x\,dx \quad (n \in \mathbb{N})$

h) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\,\cos\,x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad (0 < b < a)$

5. Idéntico enunciado para las siguientes integrales de funciones racionales

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad (a,b,c \in \mathbb{R},\ b^2 < 4ac)$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^4+x^2+1}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}\,dx$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}\,dx$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\,dx \quad (a > 0)$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \pi\frac{1{\cdot}3{\cdots}(2n-3)}{2^n a^{2n-1}\,(n-1)!} \quad (a > 0, n \geq 2)$

h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = \frac{\pi(a+2b)}{2ab^3(a+b)^2} \quad (a > 0, b > 0)$

6. Idéntico enunciado para las integrales

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \text{ sen } 3x}{x^2+9}\, dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2-2x+2}\, dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^4+5x^2+4}\, dx$

d) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x \text{ sen } x}{(x^2+4)^2}\, dx$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+x+1)^2}\, dx$

f) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda x)}{x(x^2+a^2)}\, dx \quad (\lambda > 0,\ a > 0)$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos tx}{(x^2+a^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2a^3}(1+at)e^{-at} \quad (a > 0, t > 0)$

h) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right) \quad (a \neq b, a > 0, b > 0)$

7. Comprueba la fórmula de la suma de las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4-a^4} = \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{4a^3}(\cot \pi a + \coth \pi a) \qquad (a \notin \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}i)$

b) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\text{sen}^2\, \pi a} \qquad (a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z})$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a \text{ senh } \pi a} \qquad (a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}i)$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4-a^4} = \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{4a^3}\left(\frac{1}{\text{sen } \pi a} + \frac{1}{\text{senh } \pi a}\right) \quad (a \in \mathbb{C}\backslash(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}i))$

8. Integrando la función
$$z \longrightarrow \frac{\pi \text{ sen } az}{z^3 \text{ sen } \pi z}$$
a lo largo de la frontera del cuadrado cuyos vértices son $(\pm 1 \pm i)(n+\frac{1}{2})$, donde $n \in \mathbb{N}$, calcula la suma de la serie.
$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{\text{sen } an}{n^3}.$$

9. Integrando la función
$$z \longrightarrow \frac{\pi}{\text{sen}(\pi z)} \frac{1}{(2z+1)^3}$$
a lo largo de la frontera del cuadrado cuyos vértices son $(\pm 1 \pm i)(n+\frac{1}{2})$, donde $n \in \mathbb{N}$, calcula la suma de la serie.
$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$