

I. Ejercicios (Números reales y funciones reales de variable real)

1. Supuesto que $\frac{s}{t} < \frac{x}{y}$, donde $s, x \in \mathbb{R}$, $t, y \in \mathbb{R}^+$, pruébese que

$$\frac{s}{t} < \frac{s+x}{t+y} < \frac{x}{y}.$$

2. Dados los números reales x, y , discútase la validez de las siguientes afirmaciones

- a) $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$
- b) $|x-5| < |x+1|$
- c) $|x| - |y| = |x-y|$

3. Demuéstrese que, para cada número natural n , se verifica que

- a) $1 + 3 + \dots + 2n - 1 = n^2$.
- b) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- c) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- d) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
- e) $4^n \geq n^2$

4. Calcúlese, cuando exista, el supremo y el ínfimo de los siguientes subconjuntos de números reales:

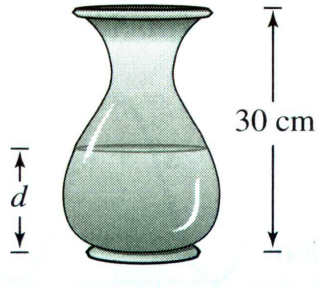
- a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geq 0\}$,
- b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 < 0\}$,
- c) $C = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

5. Pruébese que $\sqrt{3}$ es un número irracional.

6. En una vasija de 30 cm de altura entra agua a ritmo constante. Se llena en 5 segundos. Usad esta información y la forma de la vasija para responder a las siguientes cuestiones:

- a) Si d representa la profundidad del agua medida en centímetros y t el tiempo transcurrido en segundos, explíquese por qué d es función de t .
- b) Hállase el dominio y la imagen de dicha función.
- c) Esbócese una posible gráfica de la función.

7. Sea A un subconjunto de números reales y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Se dice que f es **par** (resp. **impar**) si, para cada $x \in A$, se verifica que $-x \in A$ y que $f(x) = f(-x)$ (resp. $f(x) = -f(-x)$). ¿Qué se puede decir acerca de la gráfica de una función par?, ¿y de una función impar? Dense ejemplos de funciones par, impar y no par ni impar.



8. Sea A un subconjunto de números reales y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Se dice que f está **acotada** (resp. **acotada superiormente** / **inferiormente**) si su conjunto imagen $f(A)$ es un subconjunto de números reales acotado (resp. superiormente / inferiormente acotado). Pruébese que f está acotada si, y sólo si, existe $M \in \mathbb{R}$, tal que, para cada $x \in A$, se verifica que $|f(x)| \leq M$.
9. ¿Qué funciones componen la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos?

$$1) f(x) = (\ln^2 x)e^{x^2}, \quad 2) f(x) = (\sqrt{x})^{\ln x^2}.$$

Dense otros ejemplos de composición de funciones.

10. Hállese la función inversa de

- a) $\sinh x$.
- b) $\cosh x|_{\mathbb{R}^+}$.

11. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi, \pi[$ la función definida por $g(y) = 2 \arctan y$. Hállese en función de y ,

- a) $\sin g(y)$.
- b) $\cos g(y)$.