I. Ejercicios (Espacios vectoriales)

1. Probar que en todo espacio vectorial V se verifica que

   a) Si $u, v, z \in V$, $u + v = u + z \quad \Rightarrow \quad v = z$.

   b) $t0 = 0 = 0v$, $\forall t \in \mathbb{K}, v \in V$.

   c) Si $t \in \mathbb{R}, v \in V$, $tv = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$ ó $v = 0$

2. Sea $\mathcal{C}[a, b]$ el conjunto de todas las funciones reales definidas en el intervalo $[a, b]$ que son continuas. Se define la suma en $\mathcal{C}[a, b]$ y el producto de una función por un número real de manera puntual. Pruébese que se obtiene un espacio vectorial.

3. Indicar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales del espacio vectorial apropiado en cada caso. En caso de que lo sean, dar una base.

   a) $W := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ ó } y = 0\}$.

   b) $W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

4. Dados los vectores $u = (1, 2, 1)$ y $v = (0, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, describir el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores u y v.

5. Escribir el vector $u = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$ como combinación lineal de los siguientes vectores:

   a) $(1, 1), (1, 0)$

   b) $(3, 1), (-1, 1), (2, 3)$

6. Estudiar si son linealmente independientes los siguientes conjuntos de vectores:

   a) $\{(0, 1), (-1, -1), (1, 2)\}$

   b) $\{(3, -1), (-6, 2), (0, 0)\}$

   c) $\{(1, 2, 1), (3, 1, 1), (1, 0, -1)\}$

7. Indicar razonadamente si son verdaderas ó falsas las siguientes afirmaciones:

   a) Un conjunto de vectores que contenga dos vectores iguales es linealmente dependiente.

   b) Un conjunto de vectores linealmente independiente puede contener dos vectores proporcionales, esto es, dos vectores u, v tales que $u = tv$ para algún real t.

   c) Cualquier conjunto de vectores al que pertenezca el vector nulo es linealmente dependiente.

   d) Si $u, v \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales, entonces son linealmente independientes.
   Dos vectores u, v son **ortogonales** si $(u|v) = 0$, esto es, si $\sum_{i=1}^n u(i)v(i) = 0$, donde $u = (u(1), \ldots, u(n))$, $v = (v(1), \ldots, v(n))$.

8. Comprobar si los siguientes conjuntos de vectores son base de $\mathbb{R}^3$:

   a) $B := \{(1, 2, 3), (0, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$.

   b) $B := \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

   c) $B := \{(1, 1, 1), (2, 0, 1), (4, 2, 3)\}$.

9. Sea $W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ y $v = (2, -1, -1) \in W$.

   a) Comprobar que $B := \{(-1, 0, 1), (-1, 3, -2)\}$ es una base de W.

   b) Hallar las coordenadas de v respecto de B.

   c) Hallar las coordenadas de v respecto de la base de $\mathbb{R}^3$ dada por

   $$\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (2, 0, 1)\} \ .$$

10. Los vectores u, v, w vienen dados por sus coordenadas en cierta base de $\mathbb{R}^3$. Comprobar que ellos forman una base y hallar las coordenadas del vector $x = (6, 9, 14)$ en términos de esa base.

    $$u = (1, 1, 1), \quad v = (1, 1, 2), \quad w = (1, 2, 3) \ .$$

    Dar también las matrices del cambio de base.

11. En $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ consideramos los conjuntos

    $$V := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

    y

    $$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ a + b + c + d = 0, \ 2a - c - d = 0 \right\}$$

    Probar que ambos son subespacios vectoriales y dar bases de los subespacios $V \cap W$ y $V + W$.

12. Los vectores u, v, w vienen dados por sus coordenadas en cierta base de $\mathbb{R}^3$. Comprobar que $\{u, v, w\}$ son una base de $\mathbb{R}^3$, hallar las coordenadas del vector $x = (6, 2, -7)$ en términos de esa base y las matrices del cambio de base

    $$u = (2, 1, -3), \quad v = (3, 2, -5), \quad w = (1, -1, 1) \ .$$