1. Ejercicios (Indice de un punto respecto de una curva cerrada. Forma general del teorema de Cauchy. Desarrollo en serie de Laurent. Singularidades aisladas.)

1. Sea $\rho : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^+$ una función continua verificando que $\rho(\pi) = \rho(-\pi)$, y sea $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ la curva definida, para todo $t \in [-\pi, \pi]$, por $\gamma(t) = \rho(t)e^{it}$. Calcúlese $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

2. Considérense las curvas:
$$\gamma_1(t) = t, \quad \forall t \in [-1, 1]; \quad \gamma_2(t) = e^{it} \quad \forall t \in [0, \pi] \text{ y } \gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2.$$
Calcúlese $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

3. Sean a, b, c, d números reales tales que $a < c$ y $b < d$. Consideremos la poligonal (rectángulo) $\gamma = [a + ib, c + ib, c + id, a + id, a + ib]$. Calcúlese $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

4. Sea Ω un abierto simplemente conexo del plano que no contiene al cero y contiene a $\mathbb{R}^+$. Justifíquese que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(x) = x^x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. ¿Puede suprimirse la hipótesis de que Ω sea simplemente conexo?

5. Sean $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|a| < |b|$. Obténgase el desarrollo en serie de Laurent de la función
$$f(z) = \frac{1}{(z - a)(z - b)} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\})$$
en cada uno de los anillos siguientes: $A(0; |a|, |b|)$, $A(0; |b|, +\infty)$, $A(a; 0, |b-a|)$ y $A(a; |b-a|, +\infty)$.

6. Obténgase el desarrollo en serie de Laurent de la función
$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)^2} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\})$$
en cada uno de los anillos siguientes: $A(1; 0, 2)$ y $A(1; 2, +\infty)$.

7. Clasificar las singularidades, determinando en cada caso la parte principal, de las funciones $f : \Omega \to \mathbb{C}$ siguientes:

   a) $f(z) = \dfrac{1 - \cos(z)}{z^n} \qquad \Omega = \mathbb{C}^* \quad (n \in \mathbb{N}),$

   b) $f(z) = z^n \operatorname{sen} \dfrac{1}{z} \qquad \Omega = \mathbb{C}^* \quad (n \in \mathbb{N}),$

   c) $f(z) = \dfrac{\log(1 + z)}{z^2} \qquad \Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\},$

   d) $f(z) = \dfrac{1}{z(1 - e^{2\pi i z})} \qquad \Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},$

   e) $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{tg} \pi z} \qquad \Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$

8. Sea Ω un abierto en el plano, $a \in \Omega$ y f una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$. ¿Qué relación existe entre las posibles singularidades en a de las funciones f y f'?

9. Sean f y g funciones holomorfas en un entorno reducido de un punto a. Estúdiese el comportamiento en a de las funciones $f + g$ y fg, supuesto conocido el de f y g.

10. La función f es holomorfa en un entorno del punto a y la función g tiene un polo de orden m en el punto $f(a)$. ¿Cómo se comporta en el punto a la función compuesta $g\circ f$? ¿Qué ocurre si g tiene una singularidad esencial en a?

11. Sea a una singularidad aislada de una función f. Pruébese que la función $\operatorname{Re}(f)$ no puede estar mayorada ni minorada en un entorno reducido de a. Dedúzcase que la función $\exp(f)$ tiene una singularidad esencial en a.

12. Sea Ω abierto en $\mathbb{C}$, $\{a_n\}$ una sucesión de puntos distintos de Ω que converge a un punto $a\in\Omega$. Sea f una función holomorfa en $U=\Omega\backslash\{a_n : n\in\mathbb{N}\}\cup\{a\}$ y que tiene un polo en cada punto a_n. Pruébese que, para cada $\rho>0$, el conjunto $f(D(a,\rho)\cap U)$ es denso en $\mathbb{C}$.

13. Sea $R>0$, $a\in D(0,R)$ y f una función holomorfa en $D(0,R)\backslash\{a\}$ que tiene un polo simple en a. Sea $c_n=\dfrac{f^{(n}(0)}{n!}$. Pruébese que $\lim\left\{\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right\}=a$.

14. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}$ excepto en un número finito de puntos que son polos de f. Supongamos, además, que f tiene límite (finito o infinito) en infinito. Pruébese que f es una función racional.