0. Ejercicios (Funciones armónicas)

1. Sean Ω_1 y Ω_2 abiertos del plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ y supongamos que $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ y $u : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es armónica. Pruébese que $u \circ f$ es armónica en Ω_1.

2. Pruébese que las siguientes funciones son armónicas en $\mathbb{R}^2$ y dése en cada caso una función armónica conjugada. Si $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es armónica (Ω es un abierto de $\mathbb{R}^2$), $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una *función armónica conjugada* de u si la función h dada por $h(z) := u(z) + iv(z) \quad (z \in \Omega)$ es holomorfa en Ω.

   a) $u(x, y) = xy$.
   b) $u(x, y) = x^2 - y^2$.
   c) $u(x, y) = xy + 3x^2y - y^3$.

3. Se considera la función $u(z) := \text{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right)$ si $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, $u(0) = 0$.

   a) Pruébese que u tiene derivadas parciales de primer orden en $\mathbb{R}^2$ y existen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ en todo punto.
   b) Compruébese que se verifica
   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
   c) No existe $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ en $(0, 0)$.
   Como consecuencia, u no es armónica.

4. Supongamos que $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas (sus componentes las tienen) en todo punto y verifica la ecuación de Laplace, esto es,
   $$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \ ,$$
   donde $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}$, si $u = \text{Re } f, v = \text{Im } f$. Análogamente, se define
   $$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} \ .$$
   Si la función $g(z) = zh(z)$ $(z \in \mathbb{C})$ verifica las mismas condiciones que h, pruébese entonces que h es una función entera.

5. Sea $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica y supongamos que existen $a, b \in \mathbb{R}^+$ tales que
   $$u(z) \leq a|\log|z|| + b, \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$
   Pruébese que u es constante.
   Indicación: Puede resultar útil el hecho de que una función entera h tal que existan reales positivos R, K y a verificando
   $$|h(z)| \leq K|z|^a, \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq R,$$
   ha de ser cosntante. Esto es consecuencia de las desigualdades de Cauchy para las derivadas.