Teorema límite de De Moivre y Laplace

Teorema límite de De Moivre y Laplace

Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una $B(1,p)$, y $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \xrightarrow{L} Z \; (\sim N(0,1)).$$

Teorema límite de De Moivre y Laplace

Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una $B(1,p)$, y $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \xrightarrow{L} Z \ (\sim N(0,1)).$$

Demostración:

Teorema límite de De Moivre y Laplace

Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una $B(1,p)$, y $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \xrightarrow{L} Z \;(\sim N(0,1)).$$

Demostración:

Este resultado es un caso particular del teorema de Lèvy. ■

Teorema límite de De Moivre y Laplace

Si $\{\mathbf{X_n}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una $\mathbf{B(1,p)}$, y $\mathbf{S_n}=\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{X_i}$, $\forall \mathbf{n}\in\mathbb{N}$, se tiene

$$\frac{\mathbf{S_n}-\mathbf{E}\left[\mathbf{S_n}\right]}{\sqrt{\mathbf{Var}[\mathbf{S_n}]}}\xrightarrow{\mathbf{L}}\mathbf{Z}\ (\sim \mathbf{N(0,1)}).$$

Demostración:

Este resultado es un caso particular del teorema de Lèvy. ■

Nota: Teniendo en cuenta que $E\left[S_n\right]=E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=np$, $Var\left[S_n\right]=Var\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=np(1-p)$, el resultado puede expresarse como

$$\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\xrightarrow{L} Z\ (\sim N(0,1)),$$

lo que significa, teniendo en cuenta la definición de convergencia en ley, que

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x\right)=P(Z\leq x),\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

pudiéndose aproximar tales probabilidades por el valor límite para n suficientemente grande.

Ya que, por la reproductividad de la distribución binomial, $S_n\sim B(n,p)$, el teorema de De Moivre y Laplace establece la aproximación de la distribución binomial a la normal mencionada en el tema 5.