Tema 10

Convergencia de sucesiones de variables aleatorias. Teoremas límite

1.- Sucesiones de variables aleatorias. Tipos de convergencia

Desde un punto de vista histórico, el problema límite constituye el núcleo fundamental del Cálculo de Probabilidades ya que, de hecho, el desarrollo de esta materia se vio constantemente impulsado por el estudio de tal problema. Los denominados teoremas límite tratan problemas de convergencia de sucesiones de sumas parciales de variables aleatorias independientes, y se clasifican en función del tipo de convergencia considerado.

Sucesiones de variables aleatorias

1.1.- Convergencia casi segura

La convergencia casi segura de una sucesión de variables aleatorias se refiere a la convergencia puntual de las variables como funciones. Se justifica por el hecho de que el conjunto de puntos de convergencia de una sucesión de variables aleatorias es un suceso, y establece que tal suceso tiene probabilidad uno.

Definición y propiedades

1.2.- Convergencia en probabilidad

Este tipo de convergencia especifica formalmente que las diferencias entre las variables de la sucesión y la variable límite pueden hacerse tan pequeñas como se desee con probabilidad arbitrariamente grande, sin más que tomar el índice de la sucesión suficientemente alto.

Definición y propiedades

1.3.- Convergencia en ley

La convergencia en ley de una sucesión de variables aleatorias, también denominada convergencia en distribución, se refiere a una forma particular de convergencia de la correspondiente sucesión de funciones de distribución.

Definición y propiedades

1.4.- Relaciones entre los distintos tipos de convergencia

Los tres tipos de convergencia anteriores están relacionados en el sentido de que la convergencia casi segura implica la convergencia en probabilidad y ésta, a su vez, implica la convergencia en ley. Por otra parte, según el teorema de continuidad para funciones generatrices de momentos, la convergencia en ley está implicada por la convergencia puntual de las funciones generatrices de momentos; este resultado es fundamental para la demostración de los teoremas límite referidos a convergencia en ley.

Relaciones. Teorema de continuidad

2.- Leyes de los grandes números

Establecen la convergencia en probabilidad (leyes débiles) o casi segura (leyes fuertes) a cero de sucesiones de sumas parciales de variables aleatorias independientes, centradas y normalizadas por ciertas cantidades.

Formulación

2.1.- Leyes débiles de los grandes números

El primer resultado, que marcó el punto de referencia para el estudio de las leyes de los grandes números y demás teoremas límite, es la ley débil de Bernoulli (1713); esta ley establece que cuando se realizan sucesivas repeticiones independientes de un experimento aleatorio, la sucesión de frecuencias relativas de cualquier suceso converge en probabilidad a la probabilidad de dicho suceso. El resultado más general dentro de la formulación clásica de las leyes débiles es la ley de Khintchine, que se refiere a sucesiones de variables independientes e idénticamente distribuidas, exigiendo sólo la existencia de los momentos de primer orden.

Ley débil de Bernoulli

Ley débil de Khintchine

2.2.- Leyes fuertes de los grandes números

Las leyes fuertes, que establecen resultados de convergencia casi segura, refuerzan las leyes débiles. Concretamente, la primera ley fuerte, la de Borel, refuerza la de Bernoulli, y la ley de Kolmogorov establece el resultado más general en lo que se refiere a leyes fuertes, reforzando la ley débil de Khintchine.

Ley fuerte de Borel

Ley fuerte de Kolmogorov

3.- Problema central del límite clásico

El denominado problema central del límite se refiere al estudio de la convergencia en ley de sucesiones de sumas parciales de variables aleatorias centradas y normalizadas.

3.1.- Primeros teoremas límite y formulación del problema

La formulación inicial del problema surgió a raíz de los dos primeros teoremas límite, referidos a sumas parciales de variables de Bernoulli independientes e idénticamente distribuidas; específicamente, en la formulación clásica del problema se trata de generalizar el teorema de Bernoulli (o ley débil) y el teorema de De Moivre y Laplace que, considerando el mismo tipo de variables, con distintas constantes de normalización, establecen la convergencia a la ley degenerada en cero y a la ley normal (convergencia de la ley binomial a la normal), respectivamente. Cronológicamente, el tercer teorema límite es el teorema de Poisson, que establece la convergencia de la ley binomial a la ley de Poisson; este teorema, sin embargo, quedó aislado de la formulación clásica del problema por considerar un esquema de sumas de variables distinto al de los anteriores.

Teorema límite de Bernoulli

Teorema límite de De Moivre y Laplace

3.2.- Teorema límite de Lèvy

Una de las primeras soluciones, aunque no definitiva, del problema central del límite clásico es el teorema de Lèvy, que generaliza los dos primeros teoremas límite al caso de sucesiones de variables independientes e idénticamente distribuidas, sin suponer que la distribución común sea necesariamente la de Bernoulli. Su aplicabilidad para la resolución (aproximada) de una gran cantidad de problemas prácticos hace de este resultado uno de los principales teoremas límite.