Ley débil de Khintchine (1928)

Ley débil de Khintchine (1928)

Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media finita, se satisface la ley débil,

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0,$$

donde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

Ley débil de Khintchine (1928)

Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media finita, se satisface la ley débil,

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0,$$

donde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Ley débil de Khintchine (1928)

Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media finita, se satisface la ley débil,

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0,$$

donde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Ya que la convergencia en probabilidad y la convergencia en ley son equivalentes cuando la variable límite es constante, la demostración puede realizarse probando la convergencia en ley, resultado que se prueba en el teorema límite de Lèvy. ■

Ley débil de Khintchine (1928)

Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media finita, se satisface la ley débil,

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0,$$

donde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

Demostración:

Ya que la convergencia en probabilidad y la convergencia en ley son equivalentes cuando la variable límite es constante, la demostración puede realizarse probando la convergencia en ley, resultado que se prueba en el teorema límite de Lèvy. ∎

Nota: Puesto que la convergencia en probabilidad se mantiene al sumar una constante a todas las variables de la sucesión y a la variable límite, la ley de Khintchine puede especificarse de forma equivalente como

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu,$$

donde $\mu = E[X_i], \ \forall i \in \mathbb{N}$. Esta formulación indica que la media aritmética de las variables independientes e idénticamente distribuidas $X_1, \ldots, X_n$ converge en probabilidad a la media común de dichas variables, siempre que ésta exista.