

Tema 10: Convergencia de sucesiones de variables aleatorias. Teoremas límite.

-Ejercicios resueltos-

Ejercicio 1. Juan y Pedro se presentan a un examen tipo test que consta de 150 preguntas, cada una de las cuales presenta dos opciones de respuesta, siendo sólo una de ellas correcta. Ninguno tiene ganas de estudiar, por lo que asisten, de forma independiente, a academias diferentes, cada una de las cuales posee parte del examen. En la que estuvo Juan disponen de 60 de las preguntas del examen, por lo que él decide memorizar las respuestas de las mismas y contestar al azar el resto. Por su parte, en la academia de Pedro le han asegurado disponer de 40 de las preguntas, y decide seguir la misma estrategia de Juan. Supuesto que las preguntas se responden de forma independiente, y que se aprueba con un mínimo de 100 preguntas contestadas de forma correcta, ¿qué probabilidad tiene cada uno de superar el examen?

Ejercicio 2. Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias, cada una de ellas con función masa de probabilidad

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}, \quad P\left(X_n = 1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n}, \quad P(X_n = 1) = \frac{1}{2n}.$$

- ¿Converge la sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en ley a la variable degenerada en $x = 0$?
- ¿Converge la sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en probabilidad a la variable degenerada en $x = 0$?

Ejercicio 3. En una cadena de montaje de una fábrica se ha comprobado que, de entre las piezas elaboradas en la misma, el 10 % presenta algún defecto. Supuesto que las piezas se elaboran de forma independiente, se pide:

- a) Si en una caja se empaquetan 100 piezas de las fabricadas en la citada cadena, ¿cuál es la probabilidad de encontrar más de 12 piezas defectuosas?
- b) La fábrica recibe un pedido con la restricción de que la probabilidad de que haya más del 11 % de piezas defectuosas sea 0.01 como mucho. ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de dicho pedido para que se verifique tal condición?

Ejercicio 4.