

Tema 9: Modelos probabilísticos multidimensionales

-Ejercicios resueltos-

Ejercicio 1. Dada la función

$$f(x, y) = \frac{1}{2K\pi} \exp(Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F), (x, y) \in \mathbb{R}^2, K > 0, A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R},$$

encontrar las condiciones que deben satisfacer A, B, C, D, E, F y K para que f sea una densidad normal bidimensional $N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ y expresar $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ y ρ en términos de dichas constantes.

Ejercicio 2. Determinar (haciendo uso del ejercicio 1) si la función

$$f(x, y) = \frac{1}{6\pi\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{8}{7} \left(\frac{x^2}{16} - \frac{31x}{32} + \frac{xy}{8} + \frac{y^2}{9} - \frac{4y}{3} + \frac{71}{16}\right)\right), (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

puede ser la función de densidad de un vector aleatorio (X, Y) que se distribuya según una normal bidimensional. En caso afirmativo:

- Encontrar los parámetros de tal distribución.
- Determinar la distribución condicionada de Y dado $X = x$.
- Dar la expresión de la curva y recta de regresión de Y sobre X . Determinar el grado de bondad de las mismas.
- Calcular $P(4 \leq Y \leq 6/X = 4)$.

Ejercicio 3. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim N(\beta + \gamma z_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2$, donde $\gamma, \beta \in \mathbb{R}$ y z_i , $i = 1, 2$ son valores fijos, no simultáneamente nulos, verificando $z_1 + z_2 = 0$.

- Empleando la función generatriz de momentos, obtener la distribución del vector (X_1, X_2) .
- Calcular la distribución del vector (U, V) donde $U = (X_1 + X_2)/2$ y $V = (z_1 X_1 + z_2 X_2)/a$, con $a = z_1^2 + z_2^2$.
- ¿Qué papel desempeña la hipótesis $z_1 + z_2 = 0$?



Ejercicio 4.