Tema 7

Independencia de variables aleatorias

1.- Definición de independencia y caracterizaciones

El concepto de independencia es fundamental en Cálculo de Probabilidades; de hecho, la mayoría de los resultados clásicos, que motivaron el desarrollo de esta materia, fueron obtenidos bajo la hipótesis de independencia de las variables involucradas. La definición de independencia, que se establece de manera general en términos de funciones de distribución, admite diversas caracterizaciones que simplifican notablemente el tratamiento conjunto de variables independientes.

1.1.- Definición de independencia

Dado un conjunto finito de variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio de probabilidad, dichas variables son independientes si la función de distribución conjunta se expresa como producto de las marginales de cada una de las variables. Así, en caso de independencia, las distribuciones marginales determinan la distribución conjunta.

Variables aleatorias independientes

1.2.- Caracterizaciones de independencia para variables discretas

La independencia de variables aleatorias discretas se caracteriza por la factorización de la función masa de probabilidad conjunta en producto de las marginales, lo que equivale a su factorización como producto de funciones de cada una de las variables.

Funciones masa de probabilidad conjunta y marginales

Factorización de la función masa de probabilidad conjunta

1.3.- Caracterizaciones de independencia para variables continuas

Caracterizaciones análogas a las del caso discreto, ahora en términos de funciones de densidad, son también válidas para variables de tipo continuo.

Funciones de densidad conjunta y marginales

Factorización de la función de densidad conjunta

1.4.- Caracterización de independencia en términos de sucesos

La independencia de variables aleatorias equivale a la independencia de cualquier conjunto de sucesos expresados en términos de cada una de las variables.

Caracterización en términos de sucesos

2.- Algunas propiedades de independencia

Las distintas caracterizaciones de independencia permiten probar importantes propiedades, como el hecho de que las distribuciones condicionadas coinciden con las marginales en caso de independencia, que funciones medibles aplicadas a variables independientes dan lugar a variables independientes, y el teorema de multiplicación de esperanzas, de gran aplicación en el tratamiento de variables independientes.

Propiedades

3.- Caracterización de independencia por funciones generatrices de momentos

El hecho de que funciones medibles de variables independientes son independientes, junto con el teorema de multiplicación de esperanzas, permite probar, usando el teorema de unicidad de funciones generatrices de momentos, una nueva caracterización de independencia en términos de éstas.

Caracterización por funciones generatrices de momentos

4.- Reproductividad de distribuciones

La propiedad de reproductividad de una distribución aparece ligada al concepto de independencia. Se dice que una determinada distribución es reproductiva si la suma de variables independientes con tal distribución sigue también dicha distribución. Muchas de las distribuciones estudiadas en el tema 5 son reproductivas, lo que se demuestra teniendo en cuenta que la función generatriz de momentos de la suma de variables independientes es el producto de las funciones generatrices de momentos, así como el teorema de unicidad de tales funciones.

Reproductividad de diferentes distribuciones

5.- Independencia de familias arbitrarias de variables aleatorias

La extensión del concepto de independencia a familias arbitrarias es necesaria para la formulación y tratamiento de los teoremas límite que se abordan en el tema 10, referidos a sucesiones de variables aleatorias independientes. Esta extensión, sin embargo, no supone una nueva definición, ya que se reduce a la independencia de cualquier subcolección finita. Si la independencia se refiere a cada par de variables de la familia, dichas variables se dice que son independientes dos a dos.

Independencia mutua e independencia dos a dos de familias arbitrarias de variables aleatorias

6.- Independencia de vectores aleatorios

La definición de independencia de variables aleatorias, así como las diferentes caracterizaciones y propiedades son directamente extensibles a vectores aleatorios de dimensión arbitraria.

Definición, caracterizaciones y propiedades