Tema 7: Independencia de variables aleatorias

-Ejercicios resueltos-

Ejercicio 1. En el estudio de señales aleatorias es de interés el análisis, para cada instante de tiempo t, de las variables aleatorias $Z_t = \cos(\alpha t)X_1 + \operatorname{sen}(\alpha t)X_2$ y $V_t = dZ_t/dt$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ un valor constante distinto de cero y X_i, $i = 1, 2$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una normal de media cero y varianza σ^2.

a) Sea $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Calcular la distribución de aX_i, $i = 1, 2$ usando la función generatriz de momentos.

b) Calcular, para cada valor t fijo, la distribución de Z_t y de V_t.

c) Comprobar, para cada valor t fijo, que Z_t y V_t tienen covarianza cero. ¿Es necesaria la hipótesis de normalidad para ello?

d) Estudiar si, para cada valor t fijo, Z_t y V_t son independientes. Utilizar para ello la caracterización de independencia basada en funciones generatrices de momentos.

Ejercicio 2. Sean X e Y dos variables aleatorias con función de distribución conjunta

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y)} & x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Comprobar que X e Y son variables independientes utilizando la definición y usando las caracterizaciones por factorización de las funciones de densidad y funciones generatrices de momentos. Asimismo, comprobar la independencia a partir del estudio de las distribuciones condicionadas.

Ejercicio 3. Sean X e Y dos variables aleatorias independientes. Calcular e identificar la distribución de X, condicionada a que $X+Y$ tome un valor fijo, en las siguientes situaciones

a) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, $\lambda, \mu > 0$.

b) $X \sim Exp(a)$, $Y \sim Exp(a)$, $a > 0$.