Tema 6

Variables aleatorias multidimensionales

1.- Variables aleatorias multidimensionales

- 1.1.- Espacio de Borel multidimensional
- 1.2.- Función medible multidimensional
- 1.3.- Variable aleatoria multidimensional o vector aleatorio

2.- Distribución de probabilidad de un vector aleatorio

3.- Función de distribución de un vector aleatorio

4.- Clasificación de vectores aleatorios

- 4.1.- Vectores aleatorios discretos
- 4.2.- Vectores aleatorios continuos

5.- Distribuciones marginales

6.- Distribuciones condicionadas

7.- Funciones de vectores aleatorios. Cambio de variable multidimensional

8.- Esperanza matemática de un vector aleatorio

- 8.1.- Esperanza de un vector y de una función de un vector
- 8.2.- Momentos
- 8.3.- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

9.- Función generatriz de momentos de un vector aleatorio

1.- Variables aleatorias multidimensionales

En muchas ocasiones, el interés sobre los resultados de un experimento aleatorio se refiere a más de una característica de dichos resultados y, ya que usualmente estas características estarán relacionadas, es preciso realizar un estudio conjunto, considerando transformaciones multidimensionales del espacio muestral. Surge así el concepto de variable aleatoria multidimensional o *vector aleatorio*, una función que asigna a cada elemento del espacio muestral un conjunto finito de números reales que describen el valor de cada una de las características objeto de estudio. La definición formal de vector aleatorio es extensión directa de la de variable aleatoria, requiriendo en este caso el concepto de *función medible multidimensional*, para el que debe considerarse la *σ-álgebra de Borel multidimensional*.

1.1.- Espacio de Borel multidimensional

La σ-álgebra generada por los intervalos de $\mathbb{R}^n$ recibe el nombre de σ-álgebra de Borel y da lugar al espacio de Borel n-dimensional.

σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$

1.2.- Función medible multidimensional

Es la extensión directa del concepto en el caso unidimensional, considerando ahora el espacio de Borel n-dimensional como espacio final. También como en el caso unidimensional, la condición de medibilidad puede restringirse a los intervalos de $\mathbb{R}^n$, lo que permite probar sin dificultad que una función medible multidimensional no es más que un conjunto de funciones medibles unidimensionales.

Función medible multidimensional: definición y caracterizaciones

1.3.- Variable aleatoria multidimensional o vector aleatorio

Un vector aleatorio definido en relación a un experimento aleatorio es una función medible multidimensional definida sobre el espacio de probabilidad asociado a dicho experimento. La caracterización de medibilidad de una función multidimensional por la medibilidad de sus componentes asegura que un vector aleatorio no es más que un conjunto de variables aleatorias unidimensionales.

Definición y caracterizaciones

2.- Distribución de probabilidad de un vector aleatorio

El tratamiento general de los vectores aleatorios es totalmente similar al de las variables unidimensionales y, como en tal caso, el comportamiento de un vector aleatorio queda descrito por las probabilidades de los sucesos de interés; esto es, los sucesos expresados en términos del vector. Estas probabilidades definen la distribución de probabilidad del vector aleatorio, y el espacio probabilístico original se transforma ahora en uno numérico multidimensional.

3.- Función de distribución de un vector aleatorio

Según la generalización del teorema de correspondencia al caso multidimensional, la distribución de probabilidad de un vector aleatorio determina y es determinada unívocamente por la función de distribución del vector, función real de tantas variables como componentes tenga el vector; como en el caso unidimensional, el uso de las funciones de distribución simplifica el tratamiento de las distribuciones de probabilidad.

Definición y propiedades
Ejemplo
Teorema de correspondencia
Cálculo de probabilidades a partir de la función de distribución

4.- Clasificación de vectores aleatorios

Como en el caso unidimensional, nos limitamos a estudiar en profundidad sólo vectores de tipo discreto y de tipo continuo.

4.1.- Vectores aleatorios discretos

Son aquellos cuyo conjunto de valores es numerable, y se caracterizan como conjuntos de variables aleatorias de tipo discreto. La distribución de este tipo de vectores está caracterizada, como en el caso unidimensional, por su función masa de probabilidad.

Definición y caracterización en términos de las componentes

Función masa de probabilidad

4.2.- Vectores aleatorios continuos

La definición de vector aleatorio de tipo continuo es también extensión directa de la correspondiente al caso unidimensional; en este caso, la función de densidad es una función real, de tantas variables como componentes tiene el vector, que determina unívocamente la función de distribución y, por tanto, la distribución de probabilidad del vector. A diferencia de los vectores discretos, si bien las componentes de un vector de tipo continuo son variables continuas, un vector aleatorio no tiene por qué ser continuo aunque sus componentes lo sean.

Definición. Función de densidad

Ejemplo: cálculo de probabilidades a partir de la función de densidad

5.- Distribuciones marginales

En el estudio conjunto de diversas variables aleatorias o, equivalentemente, en el estudio de vectores aleatorios, se plantean nuevos problemas que carecen de sentido en el caso unidimensional. En primer lugar, la determinación de la distribución de probabilidad de cada una de las componentes (o de cualquier subvector), denominada distribución marginal, a partir de la conjunta.

Funciones de distribución marginales

Vectores discretos: funciones masa de probabilidad marginales

Vectores continuos: funciones de densidad marginales

Ejemplo

6.- Distribuciones condicionadas

Una cuestión importante en el análisis conjunto de variables aleatorias es el estudio del comportamiento de un subconjunto de ellas, cuando el resto está sujeto a alguna condición y, en particular, cuando se conoce su valor. Este conocimiento afectará, en general, a la distribución de dichas variables, dando lugar a las denominadas distribuciones condicionadas.

Vectores discretos: funciones masa de probabilidad condicionadas

Vectores continuos: funciones de densidad condicionadas

Ejemplo

7.- Funciones de vectores aleatorios. Cambio de variable multidimensional

Los teoremas de cambio de variable multidimensional proporcionan, como en el caso unidimensional, la distribución de funciones medibles de vectores aleatorios a partir de la distribución del vector original.

Problema de cambio de variable multidimensional

Distribución del máximo y del mínimo de variables aleatorias

Cambio de variable discreto

Cambio de variable continuo

Ejemplo Play

8.- Esperanza matemática de un vector aleatorio

La definición de esperanza de un vector como el vector formado por la esperanza de cada componente hace que el interés se centre exclusivamente en el cálculo de la esperanza de una función unidimensional de un vector aleatorio.

8.1.- Esperanza de un vector y de una función de un vector

De nuevo, como ocurre en el caso unidimensional, es posible expresar la esperanza de una función de un vector aleatorio en términos de la distribución de este, lo que permite generalizar algunas propiedades de la esperanza, como la linealidad y la conservación del orden, que fueron probadas en el tema 4 para funciones de una misma variable, a variables arbitrarias.

Esperanza de un vector y de una función de un vector

Propiedades

8.2.- Momentos

Los momentos de un vector aleatorio se definen como la esperanza del producto de potencias de las variables (o de las variables centradas). Merecen especial atención los momentos de orden dos que, si existen, definen la *matriz de covarianzas* de un vector aleatorio.

Definición de momentos

8.3.- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Esta desigualdad, expresada en términos de los momentos de orden dos de un vector aleatorio bidimensional, tiene importantes aplicaciones, tanto en Cálculo de Probabilidades (tema 8) como en Inferencia Estadística.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

9.- Función generatriz de momentos de un vector aleatorio

La función generatriz de momentos de un vector aleatorio que, como en el caso unidimensional, puede no existir, tiene propiedades análogas a las de tal caso; esto es, proporciona un método alternativo para la obtención de los momentos de un vector aleatorio y, si existe, determina unívocamente la distribución del vector.

Definición y propiedades