

Tema 6: Variables aleatorias multidimensionales

-Ejercicios resueltos-

Ejercicio 1. Sea (X, Y) un vector aleatorio discreto con función masa de probabilidad

$$P(X = x, Y = y) = \frac{x + y}{15}; \quad x = 0, 1, 2; \quad y = 1, 2.$$

1. Calcular la función de distribución.
2. Calcular los momentos $E[X^{k_1} Y^{k_2}]$; $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$.
3. Calcular la función generatriz de momentos.
4. Calcular las distribuciones marginales y condicionadas.
5. Calcular $Cov[X, Y]$.
6. Calcular la distribución de la variable $U = X - Y$.

Ejercicio 2. Consideremos la siguiente función definida en $\mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = \begin{cases} 15xy^2/2 & 0 < x < a; -x < y < x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1. Determinar el valor de a para que f sea la función de densidad de un vector aleatorio (X, Y) .
2. Calcular la función de distribución.

3. Calcular los momentos $E[X^{k_1}Y^{k_2}]$; $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. A partir de ellos, obtener $Cov[X, Y]$.
4. Calcular las distribuciones marginales y condicionadas.
5. Calcular la distribución de la variable $U = X^2 - Y^2$.

Ejercicio 3. Sea D el paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$ y $(3, 3)$ y consideremos (X, Y) , un vector aleatorio con densidad

$$f(x, y) = \frac{2}{9}x, \quad (x, y) \in D.$$

Mediante la aplicación del teorema de cambio de variable bidimensional, calcular la función de densidad de la variable $U = |Y - X|$.