Tema 4
Esperanza matemática de una variable aleatoria. Momentos, funciones generatrices y otras características

4.2.- Medidas de dispersión

4.3.- Medidas de forma

1.- Esperanza matemática de una variable aleatoria

En muchas ocasiones, cuando la distribución de una variable aleatoria no es conocida, puede ser suficiente conocer algunas características de la misma para proporcionar una visión global de ella. En particular, ciertas constantes como la media, la varianza y, en general, los distintos momentos de una distribución, que se definen a partir del concepto de esperanza matemática, son útiles para describir diversas características de la distribución.

1.1.- Esperanza de una variable discreta

Para este tipo de variables, se define la esperanza como una suma de Riemann, en términos de su función masa de probabilidad. Si existe, es inmediato dar un significado intuitivo de la esperanza de una variable discreta como valor central o media de los valores de la variable.

Definición y ejemplos

1.2.- Esperanza de una variable continua

Se define como una integral en términos de la función de densidad de la variable y, como en el caso discreto, puede interpretarse como el valor medio de la variable, siempre que exista.

Definición y ejemplos

1.3.- Esperanza de una variable mixta

Se define como la suma de los valores medios correspondientes a las partes discreta y continua.

Definición y ejemplos

1.4.- Esperanza de una función de una variable aleatoria

La esperanza matemática de una función de una variable aleatoria puede obtenerse, sin necesidad de conocer explícitamente su distribución, a partir de la distribución de la variable original. Esto es especialmente útil en muchas situaciones en las que debe calcularse la esperanza de distintas variables aleatorias que son función de una misma como, por ejemplo, en el cálculo de los momentos.

Esperanza de una función de una variable aleatoria

1.5.- Propiedades de la esperanza

Además de ciertas propiedades elementales que se deducen directamente de la definición, la expresión de la esperanza de una función de una variable aleatoria en términos de la distribución de la variable original permite probar otras propiedades como la linealidad o la conservación del orden para la esperanza de variables aleatorias que son función de una misma.

Propiedades

2.- Momentos de una variable aleatoria

Son características numéricas definidas como la esperanza de ciertas funciones de la variable; en caso de existir, describen propiedades generales de la distribución.

Momentos centrados, no centrados y absolutos. Relaciones

2.1.- Desigualdades relacionadas con los momentos

Conocidos los momentos de una variable aleatoria, pueden obtenerse cotas inferiores para la probabilidad de determinados sucesos definidos en términos de la variable. Destacamos, en particular, la desigualdad de Chebychev, de gran importancia en aplicaciones prácticas, que proporciona una cota para la probabilidad de que una variable aleatoria pertenezca a un intervalo simétrico respecto a la media de la variable, en términos de su varianza Play.

Teorema de Markov: desigualdad básica
Desigualdad de Markov
Desigualdad de Chebychev

3.- Función generatriz de momentos de una variable aleatoria

Aunque los momentos de una variable pueden determinarse sin más que aplicar su definición, a veces los cálculos pueden no ser simples. Un método alternativo para la obtención de los momentos es usar la denominada función generatriz de momentos cuya importancia, además de la indicada, es que, si existe, determina unívocamente la distribución de la variable.

Definición y ejemplos

Propiedades: teorema de unicidad, relación con los momentos

4.- Otras características

Además de los momentos, existen otras características asociadas a la distribución de una variable aleatoria que proporcionan una descripción general de la misma y permiten, en ocasiones, establecer comparaciones entre distintas distribuciones.

4.1.- Medidas de posición

Son indicadores de la posición o localización de los valores de la variable en $\mathbb{R}$.

Medidas de posición central: media, mediana y moda

Medidas de posición no central: cuantiles

4.2.- Medidas de dispersión

Proporcionan indicadores de la dispersión de los valores de la variable. Las más usuales se definen como una medida global de las desviaciones de los valores de la variable respecto de las medidas de posición, por lo que indican la representatividad de estas últimas.

Medidas de dispersión

4.3.- Medidas de forma

Además de las medidas anteriores, existen diversos coeficientes que, en ocasiones, dan una visión general de la forma de la función masa de probabilidad o función de densidad de una variable; concretamente, del grado de asimetría y de la curtosis o apuntamiento de tales funciones.

- Coeficiente de asimetría de Fisher
- Coeficiente de curtosis de Fisher