Tema 4: Esperanza matemática de una variable aleatoria. Momentos, funciones generatrices y otras características.

-Ejercicios resueltos-

Ejercicio 1. Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 1/4 & x \in [0, 1) \\ 1/3 & x \in [1, 2) \\ x/6 & x \in [2, 4) \\ (x+2)/8 & x \in [4, 6) \\ 1 & x \in [6, +\infty). \end{cases}$$

a) Estudiar la existencia de sus momentos. En el caso de que existan, calcular $E[X^k]$, $k \in \mathbb{N}$.

b) Estudiar la existencia de la función generatriz de momentos. En el caso de que exista, calcularla y deducir $E[X]$ a partir de ella.

c) Calcular los coeficientes de asimetría y curtosis.

d) Calcular los cuantiles de X.

Ejercicio 2. Consideremos los valores $a_n = \dfrac{1}{e\,n!}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

a) Comprobar que los valores a_n determinan la función masa de probabilidad de alguna variable aleatoria discreta.

b) Si X es una variable aleatoria discreta que toma valores en $\mathbb{N} \cup \{0\}$ con $P(X = n) = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, estudiar la existencia de $E[X^k]$, $k > 0$.

c) Estudiar la existencia de la función generatriz de momentos. En el caso de que exista, calcularla y deducir $E[X]$ a partir de ella.

d) Comprobar, a partir de la función generatriz de momentos, que los momentos no centrados, m_k, verifican la ley de recurrencia $m_k = \sum\limits_{h=0}^{k-1} \binom{k-1}{h} m_h$.

Ejercicio 3. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} kx + 1/2 & x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con $-1/2 \leq k \leq 1/2$.

a) Estudiar la existencia de los momentos de la variable aleatoria X y, en su caso, calcularlos.

b) Estudiar la existencia de la función generatriz de momentos y, en su caso, calcularla.

c) Calcular la moda y la mediana.