

Tema 3: Variables aleatorias unidimensionales

-Ejercicios resueltos-

Ejercicio 1. Juan está solo en su casa y decide jugar a los dardos con su diana. Es un jugador metódico que sabe que de cada 4 lanzamientos, uno no impacta en la diana. Además, ha dividido la diana en tres coronas concéntricas, C_1 , C_2 y C_3 , y conoce que la probabilidad de dar en cada una de ellas es proporcional al índice que les ha asignado. A cada zona de impacto le asocia una puntuación: -10 puntos si el dardo no da en la diana, 20 si da en C_1 , 10 si da en C_2 y 0 si lo hace en C_3 .

Como sólo tiene dos dardos plantea un juego que consiste en lanzar cada dardo y sumar las puntuaciones obtenidas. Si consideramos la función X que asigna a cada par de lanzamientos la suma de las puntuaciones obtenidas:

- Describir el espacio probabilístico asociado al experimento (se entiende que la σ -álgebra considerada será la mínima que hace que la función descrita sea variable aleatoria).
- Determinar la distribución de la variable aleatoria X .

Ejercicio 2. Un programa informático selecciona de forma aleatoria números naturales con probabilidades $\alpha\rho^n$, $n = 1, \dots, N$, donde $0 < \rho < 1$ y N es el mayor entero positivo que puede almacenarse en memoria (y que se sabe es impar).

- Calcular la función masa de probabilidad y la función de distribución de la variable aleatoria X : Valor del entero seleccionado. Calcular la probabilidad de que un número natural elegido por dicho programa sea par y de que sea impar.

b) Calcular la distribución de la variable aleatoria $Y = \left| X - \frac{N+1}{2} \right| + 1$.

Ejercicio 3. Consideremos la función

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ ax/10 & x \in [0, 1) \\ bx/10 & x \in [1, 2) \\ 1/2 & x \in [2, 4) \\ 1 - c/x & x \in [4, +\infty), \end{cases}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- ¿Para qué valores de a , b y c es F_X la función de distribución de una variable aleatoria?
- De los valores anteriormente obtenidos, ¿para cuáles es F_X la función de distribución de una variable aleatoria mixta? Determinar las discontinuidades.
- Determinar a , b y c para que F_X sea la función de distribución de una variable aleatoria continua, X . En tal caso, calcular la función de densidad asociada y la distribución de la variable $Y = \frac{1}{(X-3)^2 + 1}$.