Tema 1

Introducción al Cálculo de Probabilidades

1.- Fenómenos y experimentos aleatorios

El objetivo del Cálculo de Probabilidades es establecer y desarrollar modelos matemáticos adaptables al estudio de situaciones reales que se desarrollan en ambiente de incertidumbre y que, en el lenguaje probabilístico, reciben el nombre de fenómenos aleatorios. Ciertos fenómenos aleatorios pueden ser sometidos a experimentación con el fin de recabar información sobre ellos; la aleatoriedad del fenómeno conlleva la imposibilidad de prever el resultado del experimento, incluso si se realiza bajo idénticas condiciones, lo que constituye la característica básica de los denominados experimentos aleatorios.

Experimentos aleatorios

1.1.- Espacio muestral

Cada uno de los posibles resultados individuales de un experimento aleatorio recibe el nombre de resultado o suceso elemental y el conjunto de sucesos elementales constituye el espacio muestral asociado al experimento.

Suceso elemental y espacio muestral

1.2.- Suceso aleatorio

En muchas ocasiones, el interés sobre el resultado de un experimento aleatorio se refiere a una o varias características concretas que son satisfechas por más de un resultado elemental. Surge así el concepto de suceso aleatorio, característica o propiedad observable que puede satisfacer o no cada suceso elemental.

Suceso aleatorio

1.3.- Álgebra de sucesos

Todo suceso aleatorio puede identificarse con el conjunto de sucesos elementales cuya ocurrencia implica la de tal suceso, identificación que permite usar la teoría de conjuntos para especificar relaciones y operaciones entre sucesos. Concretamente, en un experimento con espacio muestral finito, la estructura de álgebra proporciona una base consistente con las operaciones lógicas entre sucesos y, por tanto, representa adecuadamente la clase de sucesos asociada al experimento.

Operaciones con sucesos
Relaciones entre sucesos
Álgebra de sucesos

2.- Regla de Laplace

El punto de partida del Cálculo de Probabilidades es la incertidumbre que forma parte de los fenómenos aleatorios y el problema base es medir de alguna manera dicha incertidumbre; a este propósito responde el concepto de probabilidad. La primera definición formal de probabilidad, debida a Laplace (1812), se aplica a experimentos con espacio muestral finito en los que todos los sucesos elementales son igualmente factibles. En esta situación, se define la probabilidad de un suceso como el cociente entre el número de resultados elementales favorables al suceso y el número de resultados posibles en cada realización del experimento. Así, el cálculo de probabilidades se realiza mediante técnicas de conteo, siendo esencial para ello la base proporcionada por los métodos de combinatoria.

Probabilidad: regla de Laplace
Ejemplos

3.- Definición axiomática de probabilidad

A lo largo de la historia se han dado diferentes interpretaciones y definiciones del concepto de probabilidad pero, aunque actualmente sigue existiendo controversia sobre cómo debe interpretarse el concepto y el tipo de situaciones a las que debe aplicarse, todas las definiciones son compatibles con la axiomática establecida por Kolmogorov en 1933. El soporte matemático para esta definición, que permite modelar cualquier situación de incertidumbre, es el concepto de espacio medible.

3.1.- σ-álgebra de sucesos. Espacio medible

La clase de sucesos asociada a un experimento con espacio muestral arbitrario puede no ser finita y, en tal caso, cualquier unión o intersección numerable de sucesos es también un suceso. Para describir de forma coherente la clase de sucesos en estas situaciones es preciso considerar la estructura de σ-álgebra, que conduce a la definición de espacio medible.

σ-álgebra de sucesos
Espacio medible

3.2.- Axiomas de probabilidad. Espacio de probabilidad

Sobre la base de un espacio medible se define una función de probabilidad como una función de conjunto no negativa, normalizada y σ-aditiva. La introducción de una función de probabilidad sobre un espacio medible conduce a la estructura de espacio de probabilidad.

Axiomática de Kolmogorov. Espacio de Probabilidad

3.3.- Propiedades básicas de la probabilidad

A partir de los axiomas de Kolmogorov se deduce una serie de propiedades de la probabilidad, algunas de las cuales permiten calcular probabilidades de sucesos expresados en términos de otros, una vez especificadas las de éstos.

Propiedades básicas I
Propiedades básicas II
Ejemplos