Ejercicios de Cálculo II

Primera relación

Fecha límite de entrega: 17 de marzo

1. Sea A un conjunto de números reales no vacío y mayorado, que no tenga máximo. Probar que $\sup A$ es punto de acumulación de A. ¿Qué ocurre si A tiene máximo?

2. Determinar el conjunto de los puntos de acumulación de cada uno de los siguientes conjuntos:

$$\mathbb{Z}\,, \qquad \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,, \qquad \{x\in\mathbb{Q}\,:\,0<x<1\}\,, \qquad \{r\sqrt{2}\,:\,r\in\mathbb{Q}\}$$

3. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y $\alpha \in A'$. Supongamos que, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A distintos de α, con $\{x_n\} \to \alpha$, se verifica que la sucesión $\{f(x_n)\}$ es convergente. Probar que f tiene límite en el punto α.

4. Se considera la función $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma, donde $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes:

$$f(x) = \begin{cases} \log(2+x) & \text{si} \quad -1<x<0 \\ a & \text{si} \quad x=0 \\ e^{x^2+b} & \text{si} \quad x\in\mathbb{R}^+ \end{cases}$$

¿Tiene f límite en 0? ¿Para qué valores de a y b es f continua en 0? ¿Puede extenderse f para obtener una función continua en la semirrecta $[-1,+\infty[$? ¿Y en la semirrecta $[-2,+\infty[$?

5. Sea $A =]-2,-1] \cup \{0\} \cup [1,2[\cup]2,3]$ y $f : A \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \log(2+x) & \text{si} \quad -2<x\le -1 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ \log_2 x & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ \exp(x^2-4) & \text{si} \quad 2<x\le 3 \end{cases}$$

Estudiar la existencia de límite ordinario y de límites laterales de la función f en todos los puntos donde ello tenga sentido. Estudiar también la continuidad de f y clasificar sus discontinuidades.