Tema 9

Fórmula de Taylor

El proceso de derivación de funciones reales de variable real puede obviamente iterarse, obteniendo la segunda y sucesivas derivadas de una función. Igual que la derivabilidad de una función en un punto permitía aproximar la función mediante un polinomio de grado menor o igual que uno, la existencia de la derivada n-ésima en un punto dará lugar a una aproximación aún mejor, mediante un polinomio de grado menor o igual que n, llamado *polinomio de Taylor*. El error que se comete al hacer esta aproximación, es decir, la diferencia entre la función de partida y su polinomio de Taylor, se conoce como *resto de Taylor*. La validez de la aproximación se cuantifica mediante la llamada *fórmula infinitesimal del resto*, porque describe la "rapidez" con la que el resto de Taylor tiende a cero al acercarnos al punto en cuestión. Una estimación aún más precisa se consigue mediante la llamada *fórmula de Taylor*, que describe con exactitud el resto de Taylor y es un resultado análogo al Teorema del Valor Medio, pero involucrando las derivadas sucesivas de una función.

9.1. Derivadas sucesivas

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real, y recordemos la definición de la función derivada de f, que en adelante se denotará también por $f^{(1)}$:

$$A_1 = \{a \in A \cap A' : f \text{ es derivable en } a\}, \quad \text{y si } A_1 \neq \emptyset,$$
$$f^{(1)} = f' : A_1 \to \mathbb{R}, \quad f^{(1)}(a) = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \forall a \in A_1$$

Si $a \in A_1 \cap A_1'$ y f' es derivable en a, decimos que f es *dos veces derivable* en a. La derivada de f' en a recibe el nombre de *segunda derivada* de f en a y se denota lógicamente por $f''(a)$, o también por $f^{(2)}(a)$. Si ahora A_2 es el conjunto de los puntos de $A_1 \cap A_1'$ en los que f es dos veces derivable, y suponemos que $A_2 \neq \emptyset$, la función $f'' = f^{(2)} : A_2 \to \mathbb{R}$, que a cada punto $a \in A_2$ hace corresponder la segunda derivada de f en a, es la *función derivada segunda* de f. Así pues, tenemos:

$$A_2 = \{a \in A_1 \cap A_1' : f \text{ es dos veces derivable en } a\}, \quad \text{y si } A_2 \neq \emptyset,$$
$$f^{(2)} = f'' : A_2 \to \mathbb{R}, \quad f^{(2)}(a) = f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} \quad \forall a \in A_2$$

En general, sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $f^{(n)} : A_n \to \mathbb{R}$ la función derivada n-ésima de f. Si $a \in A_n \cap A_n'$ y $f^{(n)}$ es derivable en a, decimos que f es $n+1$ *veces derivable* en a y la derivada de $f^{(n)}$ en a es, por definición, la $(n+1)$*-ésima derivada* de f en a, que se denota por $f^{(n+1)}(a)$. Si A_{n+1} es el conjunto de puntos de $A_n \cap A_n'$ en los que f es $n+1$ veces derivable, cuando sea $A_{n+1} \neq \emptyset$, podemos considerar la *función derivada* $(n+1)$*-ésima* de f, es decir, la función $f^{(n+1)} : A_{n+1} \to \mathbb{R}$ que a cada punto de A_{n+1} hace corresponder la $(n+1)$-ésima derivada de f en dicho punto. En resumen:

$$A_{n+1} = \{a \in A_n \cap A_n' : f \text{ es } n+1 \text{ veces derivable en } a\}, \quad \text{y si } A_{n+1} \neq \emptyset,$$
$$f^{(n+1)} : A_{n+1} \to \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)}{x - a} \quad \forall a \in A_{n+1}$$

Por conveniencia de notación, para cualquier función real de variable real $f : A \to \mathbb{R}$, es frecuente escribir $f^{(0)}$ para referirse a la propia función: $f^{(0)} = f$.

Es fácil adivinar que la mayoría de los resultados sobre derivadas sucesivas se probarán por inducción, obteniendo información sobre la derivada $(n+1)$-ésima de una función, a partir de su derivada n-ésima. A este respecto conviene aclarar que, aunque $f^{(n+1)}$ se ha definido por inducción como la derivada de $f^{(n)}$, también es la n-ésima derivada de f'. Más concretamente:

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y sean $a \in A \cap A'$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces f es $n+1$ veces derivable en a si, y sólo si, f es derivable en a y f' es n veces derivable en a, en cuyo caso se tiene: $f^{(n+1)}(a) = (f')^{(n)}(a)$.*

La demostración por inducción es bastante clara, partiendo del caso evidente $n = 1$. Suponiendo que la afirmación buscada es cierta para un número natural n, la comprobamos para $n+1$. Para ello, sea A_{n+1} el conjunto de definición de la función $f^{(n+1)} = \big(f'\big)^{(n)}$. Cualquiera de las afirmaciones cuya equivalencia queremos probar implica que $a \in A_{n+1} \cap A_{n+1}'$ y, para todo $x \in A_{n+1} \setminus \{a\}$, se tiene por hipótesis

$$\frac{f^{(n+1)}(x) - f^{(n+1)}(a)}{x - a} = \frac{(f')^{(n)}(x) - (f')^{(n)}(a)}{x - a}$$

luego f es $n+2$ veces derivable en a si, y sólo si, f' es $n+1$ veces derivable en a, en cuyo caso se tiene $f^{(n+2)}(a) = \big(f'\big)^{(n+1)}(a)$, como se quería. ■

Naturalmente la observación anterior puede iterarse. Obtenemos que, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, decir que una función f es $n+m$ veces derivable en un punto a equivale a decir que f es n veces derivable en a y $f^{(n)}$ es m veces derivable en a, en cuyo caso se tiene: $f^{(n+m)}(a) = \left(f^{(n)}\right)^{(m)}(a)$. Hemos probado con detalle el caso $m = 1$ y análogo razonamiento permite pasar de m a $m+1$. Lo indicamos brevemente:

$$f^{(n+m+1)} = \left(f^{(n+m)}\right)' = \left[\left(f^{(n)}\right)^{(m)}\right]' = \left(f^{(n)}\right)^{(m+1)}$$

9.2. Caso de funciones definidas en intervalos

Ha quedado claro que la definición de las derivadas sucesivas tiene sentido para funciones definidas en conjuntos bastante arbitrarios. Sin embargo, este contexto general puede resultar demasiado problemático: el conjunto A_n en el que está definida la función derivada n-ésima va reduciéndose al aumentar n, porque ni los puntos aislados de A_n ni los puntos de acumulación de A_n en los que $f^{(n)}$ no es derivable pueden pertenecer al conjunto A_{n+1}. Para evitar este tipo de complicaciones, a partir de ahora trabajaremos solamente con funciones definidas en un intervalo, estudiando solamente la derivabilidad en todos los puntos del intervalo, con lo que el intervalo de definición de la función y de las sucesivas derivadas que vayamos considerando es siempre el mismo. Como ya hemos hecho anteriormente, siempre que hablemos de un intervalo, se entenderá que no es vacío y no se reduce a un punto.

Si I es un intervalo y $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $D^n(I)$ al conjunto de todas las funciones de I en $\mathbb{R}$ que son n veces derivables en todo punto de I. Coherentemente, $D^0(I)$ será el conjunto de todas las funciones de I en $\mathbb{R}$, que se suele denotar más bien por $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, como ya hemos hecho anteriormente. Para $f \in D^n(I)$ y $k = 0,1,2,\ldots,n$ tenemos que $f^{(k)} \in D^{n-k}(I)$. En particular, cuando $k < n$, $f^{(k)}$ es continua en I, cosa que puede no ocurrir para $k = n$.

Decimos que $f : I \to \mathbb{R}$ es una función *de clase* C^n en I cuando $f \in D^n(I)$ y $f^{(n)}$ es continua en I. Denotamos por $C^n(I)$ al conjunto de todas las funciones de clase C^n en I. Ahora $C^0(I)$ será el conjunto de todas las funciones de I en $\mathbb{R}$ que son continuas en I, que también se denota a veces por $C(I,\mathbb{R})$. De nuevo, para $f \in C^n(I)$ y $k = 0,1,2,\ldots n$ tenemos que $f^{(k)} \in C^{n-k}(I)$.

Decimos finalmente que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es *indefinidamente derivable* en I o también que f es *de clase* C^∞ en I, cuando $f \in D^n(I)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y denotamos por $C^\infty(I)$ al conjunto de todas las funciones de clase C^∞ en I. Se tiene por tanto:

$$C^\infty(I) = \bigcap_{n=1}^{\infty} D^n(I) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n(I)$$

Si $f \in C^\infty(I)$ tenemos claramente que $f^{(k)} \in C^\infty(I)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Recíprocamente, también es claro que si para algún $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $f \in D^k(I)$ y $f^{(k)} \in C^\infty(I)$, entonces $f \in C^\infty(I)$. Observemos la relación entre los conjuntos de funciones recién definidos. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene claramente:

$$\mathcal{F}(I,\mathbb{R}) \supset C^0(I) \supset D^n(I) \supset C^n(I) \supset D^{n+1}(I) \supset C^{n+1}(I) \supset C^\infty(I)$$

Más adelante veremos que, para cualquier intervalo I, las inclusiones anteriores son estrictas: existen funciones $f \in D^n(I)$ tales que $f \notin C^n(I)$, así como funciones $g \in C^n(I)$ tales que $g \notin D^{n+1}(I)$. Para $n = 0$ esto es más que sabido, y también sabemos que $D^1(I) \neq C^1(I)$. Pasamos a establecer las reglas básicas para el cálculo de derivadas sucesivas:

- *Sea I un intervalo y $n \in \mathbb{N}$. Si $f,g \in D^n(I)$, entonces $f+g \in D^n(I)$ con*

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \tag{1}$$

Por tanto, para $f,g \in C^n(I)$ se tiene $f+g \in C^n(I)$, y $f+g \in C^\infty(I)$ para $f,g \in C^\infty(I)$.

La demostración por inducción, partiendo del caso conocido $n = 1$, es clara. Si $f, g \in D^{n+1}(I)$, tenemos en particular que $f, g \in D^n(I)$, con lo que la hipótesis de inducción nos dice que $f + g \in D^n(I)$ verificándose (1). Es claro entonces que $(f+g)^{(n)}$ es derivable en I, como suma de dos funciones derivables en I, luego $f + g \in D^{n+1}(I)$ y tenemos

$$(f+g)^{(n+1)} = \left[(f+g)^{(n)}\right]' = \left(f^{(n)}\right)' + \left(g^{(n)}\right)' = f^{(n+1)} + g^{(n+1)} \qquad \blacksquare$$

Con un poco más esfuerzo, obtenemos una fórmula explícita para las derivadas sucesivas de un producto, que se conoce como *regla de Leibniz* y recuerda claramente la fórmula del binomio de Newton:

- *Sea I un intervalo y $n \in \mathbb{N}$. Si $f, g \in D^n(I)$, entonces $fg \in D^n(I)$ con*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \tag{2}$$

Por tanto, para $f, g \in C^n(I)$ se tiene $fg \in C^n(I)$, y $fg \in C^\infty(I)$ para $f, g \in C^\infty(I)$.

De nuevo razonamos por inducción, pues para $n = 1$ la regla de Leibniz no es más que la regla ya conocida para la primera derivada del producto. Si $f, g \in D^{n+1}(I)$, tenemos en particular que $f, g \in D^n(I)$, con lo que la hipótesis de inducción nos dice que $fg \in D^n(I)$ verificándose (2). Puesto que, para $k = 0, 1, \ldots, n$, las funciones $f^{(n-k)}$ y $g^{(k)}$ son derivables en I, deducimos que $(fg)^{(n)}$ es derivable en I, es decir, fg es $n+1$ veces derivable en I. Usando la regla para la primera derivada de un producto tenemos:

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f^{(n-k)} g^{(k)}\right]' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)} g^{(k)} \\
&= f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] f^{(n+1-k)} g^{(k)} + f g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)}
\end{aligned}$$

que es la regla de Leibniz para la derivada $(n+1)$-ésima. $\blacksquare$

Como caso particular del resultado anterior, tomando como g una función constante en $\mathbb{R}$, que obviamente es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, deducimos que para $f \in D^n(I)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lambda f \in D^n(I)$ con $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$. Por tanto, si $f \in C^n(I)$ tenemos $\lambda f \in C^n(I)$ y si $f \in C^\infty(I)$ será $\lambda f \in C^\infty(I)$.

Podemos resumir los resultados anteriores diciendo que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $D^n(I)$, $C^n(I)$ y $C^\infty(I)$ son subanillos y también subespacios vectoriales de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Presentamos ya los primeros ejemplos de funciones de clase C^∞.

- *Toda función polinómica es de clase* C^∞ *en* $\mathbb{R}$.

Más adelante trabajaremos con detalle las sucesivas derivadas de las funciones polinómicas. Veamos ahora lo que ocurre con los cocientes:

- *Sea* I *un intervalo,* $n \in \mathbb{N}$*,* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *y supongamos que* $g(x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$*. Si* $f, g \in D^n(I)$*, entonces* $f/g \in D^n(I)$*. Si* $f, g \in C^n(I)$ *se tiene* $f/g \in C^n(I)$*, luego si* $f, g \in C^\infty(I)$ *será* $f/g \in C^\infty(I)$*.*

Razonamos una vez más por inducción, partiendo del caso conocido $n = 1$, pero de forma diferente, porque no tenemos una fórmula explícita para la derivada n-ésima del cociente. Si $f, g \in D^{n+1}(I)$, sabemos que f/g es derivable en I con

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Puesto que $f, g, f', g' \in D^n(I)$, los resultados anteriores sobre sumas y productos nos dicen que $f'g - fg' \in D^n(I)$ y también $g^2 \in D^n(I)$. La hipótesis de inducción nos dice entonces que $(f/g)' \in D^n(I)$, es decir, que $f/g \in D^{n+1}(I)$.

En el caso de funciones de clase C^n la inducción es completamente análoga. Si $f, g \in C^1(I)$, es claro que $(f/g)'$ es continua en I, luego $f/g \in C^1(I)$ y tenemos probado el caso $n = 1$. Suponiendo que el resultado es cierto para un $n \in \mathbb{N}$, para $f, g \in C^{n+1}(I)$, obtenemos que $f'g - fg' \in C^n(I)$ y que $g^2 \in C^n(I)$, y la hipótesis de inducción nos da $(f/g)' \in C^n(I)$, es decir, $f/g \in C^{n+1}(I)$. ■

Como consecuencia inmediata de los dos últimos resultados obtenemos:

- *Toda función racional en un intervalo* I *es de clase* C^∞ *en* I*.*

Obtenemos ahora fácilmente una versión de la regla de la cadena para funciones varias veces derivables, pero tampoco tendremos una fórmula explícita para las derivadas sucesivas de una composición de funciones.

- *Sean* I, J *intervalos y consideremos dos funciones* $f : I \to J$ *y* $g : J \to \mathbb{R}$*. Si* $f \in D^n(I)$ *y* $g \in D^n(J)$ *entonces* $g \circ f \in D^n(I)$*. Si* $f \in C^n(I)$ *y* $g \in C^n(J)$ *se tiene* $g \circ f \in C^n(I)$*. Por tanto, si* $f \in C^\infty(I)$ *y* $g \in C^\infty(J)$ *será* $g \circ f \in C^\infty(I)$*.*

El razonamiento, como siempre por inducción, es muy similar al que hemos hecho para el cociente. Suponiendo que f es derivable en I y g es derivable en J, la regla de la cadena nos dice que $g \circ f$ es derivable en I con

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f'$$

Si $f \in C^1(I)$ y $g \in C^1(J)$, vemos que $(g \circ f)'$ es continua en I, es decir, $g \circ f \in C^1(I)$, lo que completa el caso $n = 1$. Suponiendo entonces que $f \in D^{n+1}(I)$ y $g \in D^{n+1}(J)$, tenemos $g' \in D^n(J)$ y $f \in D^n(I)$, con lo que la hipótesis de inducción nos dice que $g' \circ f \in D^n(I)$, pero también $f' \in D^n(I)$, luego $(g' \circ f)\, f' \in D^n(I)$. El razonamiento para funciones de clase C^n es idéntico. ■

Completamos las reglas básicas de cálculo con la versión del teorema de la función inversa para las derivadas sucesivas.

- *Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I verificando que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Consideremos el intervalo $J = f(I)$ y la función inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $f \in D^n(I)$, entonces $f^{-1} \in D^n(J)$. Si $f \in C^n(I)$ se tiene $f^{-1} \in C^n(J)$, y si $f \in C^\infty(I)$ será $f^{-1} \in C^\infty(J)$.*

Sabemos que f^{-1} es derivable en J con

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Si $f \in C^1(I)$ tenemos claramente que $\left(f^{-1}\right)'$ es continua en I, luego $f^{-1} \in C^1(I)$, lo único que nos quedaba por ver en el caso $n = 1$. De nuevo por inducción, si suponemos $f \in D^{n+1}(I)$, tenemos $f' \in D^n(I)$ y $f^{-1} \in D^n(J)$, luego $\left(f^{-1}\right)' \in D^n(J)$. De haber supuesto $f \in C^{n+1}(I)$, el mismo razonamiento nos hubiera dado $f^{-1} \in C^{n+1}(J)$. ■

Pasamos a presentar una amplia gama de funciones de clase C^∞ en diferentes intervalos. Aparte de las funciones racionales en $\mathbb{R}$, un nuevo ejemplo salta a la vista:

- *La función exponencial es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y todas sus derivadas coinciden con la propia función exponencial.*

Para el logaritmo, podemos aplicar que es la inversa de la función exponencial, o pensar que su primera derivada es una función racional en $\mathbb{R}^+$. Por composición obtenemos las funciones potencia:

- *La función logaritmo es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^+$.*

- *Para $\alpha \in \mathbb{R}$, la función potencia de exponente α es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^+$. En particular, para $n \in \mathbb{N}$, la función raíz n-ésima es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^+$. Si n es impar, la función raíz n-ésima también es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^-$.*

Con respecto a las funciones trigonométricas y sus inversas, las siguientes afirmaciones se deducen fácilmente de los resultados anteriores:

- *Las funciones seno y coseno son de clase C^∞ en $\mathbb{R}$.*

- *Las funciones tangente y secante son de clase C^∞ en $]k\pi - (\pi/2), k\pi + (\pi/2)[$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

- *Las funciones cosecante y cotangente son de clase C^∞ en $]k\pi, (k+1)\pi[$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

- *Las funciones arco seno y arco coseno son de clase C^∞ en $]-1, 1[$.*

- *La función arco tangente es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$.*

9.3. Polinomios de Taylor

Para motivar la definición, empecemos observando las derivadas sucesivas de una función polinómica de grado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ que, fijado $a \in \mathbb{R}$, se puede siempre escribir en la forma:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j (x-a)^j \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

con $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Sabemos que, si $n \geqslant 1$, pues en otro caso P es constante, se tiene

$$P'(x) = \sum_{j=1}^{n} j\alpha_j (x-a)^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\alpha_{j+1} (x-a)^j \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Si $n \geqslant 2$ deducimos que

$$P''(x) = \sum_{j=2}^{n} j(j-1)\alpha_j (x-a)^{j-2} = \sum_{j=0}^{n-2} (j+2)(j+1)\alpha_{j+2} (x-a)^j \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En general, una sencilla inducción (finita) nos permite concluir que para $0 \leqslant k \leqslant n$ se tiene

$$P^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{n} \frac{j\,!}{(j-k)\,!}\alpha_j (x-a)^{j-k} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(j+k)\,!}{j\,!}\alpha_{j+k} (x-a)^j \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

mientras que, para $k > n$ la derivada k-ésima $P^{(k)}$ es idénticamente nula. Tomando $x = a$ en la última igualdad obtenemos

$$P^{(k)}(a) = k\,!\,\alpha_k \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots, n$$

Así pues, el polinomio P queda determinado cuando se conocen los valores de P y de sus n primeras derivadas en un sólo punto $a \in \mathbb{R}$. En concreto, se tiene claramente

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En el segundo miembro, podemos sustituir las derivadas de P por las de cualquier función que sea n veces derivable en a, obteniendo un polinomio que no coincidirá con dicha función, pero puede ser una buena aproximación de la misma. Esto motiva la definición que sigue.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real, $a \in A$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si f es n veces derivable a, podemos considerar el polinomio $T_n[f,a]$ dado por:

$$T_n[f,a](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

que se denomina *polinomio de Taylor de orden n de la función f en el punto a*, en honor del matemático inglés B. Taylor (1685-1731). Resaltamos que $T_n[f,a]$ es el único polinomio P, de grado menor o igual que n, que verifica $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ para $0 \leqslant k \leqslant n$.

Veamos si podemos esperar que $T_n[f,a]$ sea una buena aproximación de la función f cerca del punto a. El polinomio $T_0[f,a]$ es constantemente igual a $f(a)$ y la continuidad de f en a nos dice que $f - T_0[f,a]$ tiene límite cero en el punto a. Más interesante es el caso $n = 1$, pues entonces tenemos

$$T_1[f,a](x) = f(a) + f'(a)(x-a) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y la derivabilidad de f en a implica como sabemos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_1[f,a](x)}{x-a} = 0$$

luego podemos decir que la diferencia $f - T_1[f,a]$ tiende a cero en el punto a más rápidamente que $x - a$, algo mejor que lo dicho para la diferencia $f - T_0[f,a]$. En general, podemos esperar que al aumentar n, la aproximación de f mediante su polinomio de Taylor vaya mejorando. Bajo ciertas condiciones podremos probar efectivamente este hecho y, para ello, usaremos la siguiente relación entre los polinomios de Taylor de una función y de su derivada.

- *Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y f una función $n+1$ veces derivable en un punto $a \in \mathbb{R}$. Se tiene entonces:*

$$T_{n+1}[f,a]' = T_n[f',a]$$

La comprobación es inmediata, pues de

$$T_{n+1}[f,a](x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

deducimos directamente que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$T_{n+1}[f,a]'(x) = \sum_{k=0}^{n} (k+1) \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(f'\right)^{(k)}}{k!}(x-a)^k = T_n[f',a](x) \qquad \blacksquare$$

9.4. Fórmula infinitesimal del resto

Veamos ya en qué sentido, y bajo qué condiciones, podemos decir que el polinomio de Taylor de una función es una buena aproximación de la función, cerca del punto considerado. El siguiente resultado se conoce como *Teorema de Taylor*, o también como *fórmula infinitesimal del resto*.

Teorema. *Sea I un intervalo, $n \in \mathbb{N}$ y $f \in D^{n-1}(I)$. Si f es n veces derivable en un punto $a \in I$, entonces*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n[f,a](x)}{(x-a)^n} = 0 \tag{3}$$

Demostración. Se hará una vez más por inducción. En el caso $n = 1$ la única hipótesis es que $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en a, pero entonces sabemos, por definición de derivada, que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_1[f,a](x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0$$

Supongamos demostrado el teorema para un $n \in \mathbb{N}$ y, lo que es importante, para cualquier función que cumpla sus hipótesis. Para una función $f \in D^n(I)$ que sea $n+1$ veces derivable en a, deberemos probar (3), pero sustituyendo n por $n+1$.

Para ello aplicamos la regla de l'Hôpital, usando las funciones $\varphi, \psi : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\varphi(x) = f(x) - T_{n+1}[f,a](x), \qquad \psi(x) = (x-a)^{n+1} \qquad \forall x \in I \setminus \{a\}$$

Claramente, ambas son funciones derivables en $I \setminus \{a\}$, con $\psi'(x) = (n+1)(x-a)^n \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$ y se tiene evidentemente que $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to a} \psi(x) = 0$, luego se cumplen la hipótesis de la primera regla de l'Hôpital. Además, tenemos claramente

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{f'(x) - T_{n+1}[f,a]'(x)}{(n+1)(x-a)^n} = \frac{1}{n+1} \frac{f'(x) - T_n[f',a](x)}{(x-a)^n}$$

donde hemos usado la relación entre los polinomios de Taylor de f y de su derivada. Puesto que $f' \in D^{n-1}(I)$ y f' es n veces derivable en a, la hipótesis de inducción se puede aplicar a la función f' obteniendo que

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x) - T_n[f',a](x)}{(x-a)^n} = 0, \quad \text{es decir,} \quad \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = 0$$

Aplicando la regla de l'Hôpital concluimos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_{n+1}[f,a](x)}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$$

como queríamos demostrar. ■

El resultado anterior explica la utilidad de las derivadas sucesivas. Ha quedado claro que en el caso $n = 1$ la fórmula infinitesimal del resto no es otra cosa que la definición de derivada, interpretada en su momento como la posibilidad de aproximar una función cerca de un punto mediante un polinomio de grado menor o igual que 1, justo su polinomio de Taylor de orden 1 en dicho punto. Pues bien, ahora hemos obtenido el mismo resultado para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario: suponiendo que la función es derivable $n-1$ veces en un intervalo que contiene al punto a (la hipótesis restrictiva que nos ha permitido usar la regla de l'Hôpital) y n veces derivable en a, podemos aproximar la función, cerca del punto a por un polinomio de grado menor o igual que n, su polinomio de Taylor de orden n en el punto a. En general, podemos esperar que esta aproximación sea tanto mejor cuanto mayor sea n, puesto que la diferencia $f - T_n[f,a]$ tiende a cero en el punto a más rápidamente que $(x-a)^n$.

9.5. Extremos relativos

La fórmula infinitesimal del resto permite completar el estudio de los extremos relativos de una función: nos da una condición suficiente de extremo relativo, que complementa la condición necesaria (primera derivada nula) vista como paso previo al Teorema de Rolle.

- *Sea I un intervalo y $a \in I^\circ$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f \in D^{n-1}(I)$ verificando que $f^{(k)}(a) = 0$ para $1 \leqslant k < n$. Supongamos que f es n veces derivable en a con $f^{(n)}(a) \neq 0$. Entonces:*
  - (i) *Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en el punto a.*
  - (ii) *Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en el punto a.*
  - (iii) *Si n es impar, f no tiene un extremo relativo en el punto a.*

Empecemos observando el polinomio de Taylor de orden n y la información que nos da la fórmula infinitesimal del resto:

$$T_n[f,a](x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{luego} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Por ser $f^{(n)}(a) \neq 0$, tenemos que para x suficientemente cerca de a, la diferencia $f(x) - f(a)$ tiene el mismo signo que el producto $f^{(n)}(a)\,(x-a)^n$, que evidentemente depende del signo de $f^{(n)}(a)$ y de que n sea par o impar. Con más detalle, existe $\delta > 0$, que podemos tomar suficientemente pequeño para que $]a-\delta, a+\delta[\subset I$ (porque $a \in I^\circ$) verificando que

$$|x-a| < \delta \implies \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} f^{(n)}(a) \geqslant 0 \tag{4}$$

(i). En este caso tenemos que $f(x) \geqslant f(a)$ para todo $x \in]a-\delta, a+\delta[$, luego f tiene un mínimo relativo en el punto a.

(ii). Ahora (4) nos dice que $f(x) \leqslant f(a)$ para todo $x \in]a-\delta, a+\delta[$.

(iii). Suponiendo $f^{(n)}(a) > 0$, (4) nos dice ahora que $f(x) \leqslant f(a)$ para todo $x \in]a-\delta, a[$ mientras que $f(x) \geqslant f(a)$ para todo $x \in]a, a+\delta[$, luego f no puede tener un extremo relativo en a. Si $f^{(n)}(a) < 0$, lo anterior se aplica a $-f$, obteniendo la misma conclusión. ■

9.6. Fórmula de Taylor

Con hipótesis algo más restrictivas que las de la fórmula infinitesimal del resto, vamos a obtener ahora una expresión concreta para la diferencia entre una función y su polinomio de Taylor de un cierto orden, a la que se suele llamar *resto de Taylor* de dicho orden para la función dada, en el punto considerado. Los resultados de este tipo se conocen con el nombre genérico de *fórmulas de Taylor* y difieren unos de otros precisamente en la expresión concreta que se obtiene para el resto.

Teorema *(Fórmula de Taylor con resto de Lagrange). Sea I un intervalo, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $f \in C^n(I) \cap D^{n+1}(I^\circ)$. Entonces, para cualesquiera $a, x \in I$ con $a \neq x$, existe un punto c en el intervalo abierto de extremos a y x ($]a,x[$ o $]x,a[$) tal que*

$$f(x) - T_n[f,a](x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$$

Demostración. Fijamos $a, x \in I$ con $a \neq x$, y llamamos J al intervalo cerrado y acotado de extremos a y x, que evidentemente verifica $J \subset I$. Conviene tener muy presente que a y x van a estar fijos en todo el razonamiento.

Aplicaremos el Teorema del Valor Medio generalizado a las funciones $\varphi, \psi : J \to \mathbb{R}$ definidas de la siguiente forma:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \quad \psi(t) = -(x-t)^{n+1} \quad \forall t \in J$$

Observamos que φ es una suma de funciones, siendo cada sumando el producto de una derivada $f^{(k)}$, con $0 \leqslant k \leqslant n$, por una función polinómica. Por ser $f \in C^n(I)$ tenemos que φ es continua en J y, por ser $f \in D^{n+1}(I^\circ)$ tenemos también que φ es derivable en $J^\circ \subset I^\circ$. Con respecto a ψ, es claro que $\psi \in C^\infty(J)$. Tenemos pues dos funciones continuas en J y derivables en J°. Si $a < x$ será $J = [a,x]$ y el Teorema del Valor Medio generalizado nos da $c \in]a,x[$ tal que:

$$\psi'(c)\big(\varphi(x) - \varphi(a)\big) = \varphi'(c)\big(\psi(x) - \psi(a)\big) \tag{5}$$

Si fuese $a > x$ tendríamos $J = [x,a]$ y obtenemos $c \in]x,a[$ verificando la misma igualdad, salvo que ambos miembros aparecen cambiados de signo. En cualquier caso, tenemos $c \in J^\circ$ como se quería, verificando (5). Todo lo que queda es traducir en términos de f los valores de φ, ψ y sus derivadas que aparecen en (5), para comprobar que se trata precisamente de la igualdad buscada. Empecemos por lo más obvio:

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = f(x), \quad \varphi(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &\psi(x) = 0, \quad \psi(a) = -(x-a)^{n+1}, \quad \psi'(c) = (n+1)(x-c)^n \end{aligned} \tag{6}$$

El cálculo de φ' es algo más laborioso, pero también sencillo. Para todo $t \in J^\circ$ se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \end{aligned} \tag{7}$$

Al sustituir (6) y (7) (con $t = c$) en (5), obtenemos:

$$(n+1)(x-c)^n \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n (x-a)^{n+1}$$

y la igualdad buscada se consigue dividiendo ambos miembros por $(n+1)(x-c)^n \neq 0$. ■

En el caso $n = 0$ la hipótesis del teorema anterior es $f \in C^0(I) \cap D^1(I)$ y la tesis que se obtiene es $f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)$, que son precisamente la hipótesis y la tesis del Teorema del Valor Medio. Así pues, podemos afirmar que la Fórmula de Taylor generaliza el Teorema del Valor Medio de la misma forma que la fórmula infinitesimal del resto generalizaba la definición de derivada, en ambos casos involucrando derivadas sucesivas.

Como aplicación evidente de la Fórmula de Taylor, obtenemos la siguiente consecuencia, que también se podría probar directamente por inducción.

- *Sea I un intervalo, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $f \in C^n(I) \cap D^{n+1}(I)$ verificando que $f^{(n+1)}(x) = 0$ para todo $x \in I^\circ$. Entonces f es una función polinómica de grado menor o igual que n.*

9.7. Desarrollos en serie de Taylor

Concluimos este tema viendo algunas aplicaciones importantes de la fórmula de Taylor. Observemos en primer lugar la regla de definición que siguen los sucesivos polinomios de Taylor de una función en un punto, que es análoga a la que usamos para obtener las sumas parciales de una serie.

Más concretamente, sea I un intervalo, consideremos una función $f \in C^\infty(I)$ y fijemos un punto $a \in I$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ podemos considerar la serie

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}\,(x-a)^n$$

que se conoce como *serie de Taylor* de la función f centrada en el punto a. En realidad tenemos una *serie de funciones* definidas en $\mathbb{R}$, cuyo término general es una *sucesión de funciones*. Sin embargo, no vamos a trabajar con sucesiones y series de funciones, simplemente nos limitamos a pensar que, para cada $x \in \mathbb{R}$, tenemos una serie de números reales que se obtiene "evaluando" la serie de Taylor en el punto x. La Fórmula de Taylor nos informa sobre la relación entre la función f y las sumas parciales de la serie de Taylor, nos da la siguiente estimación:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}\,(x-a)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!}\,(x-a)^{n+1} \quad \forall a,x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{8}$$

donde c depende de la terna (a,x,n) y sólo sabemos que pertenece al intervalo abierto de extremos a y x. Para cada $x \in I$, parece natural hacerse la siguiente pregunta

$$¿\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}\,(x-a)^n\ ?$$

En el mejor de los casos, esta igualdad sería cierta para todo $x \in I$, con lo que podríamos expresar la función f como suma de la serie de Taylor en todo el intervalo I, obteniendo lo que se conoce como *desarrollo en serie de Taylor* de la función f centrado en el punto a.

Para abordar esta pregunta usando (8), se puede empezar observando que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se tiene $\{(x-a)^{n+1}/(n+1)\,!\} \to 0$, pues el criterio del cociente nos dice incluso que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}$ es convergente. Sin embargo, no tenemos suficiente información sobre la sucesión $\left\{f^{(n+1)}(c)\right\}$. En general, la respuesta a la pregunta planteada puede ser negativa: dado $x \in I$, puede ocurrir que la serie de Taylor en el punto x no sea convergente e incluso que, siendo convergente, su suma no coincida con $f(x)$. No vamos a estudiar con detalle este problema, nos limitaremos a presentar un par de ejemplos de desarrollos en serie de Taylor.

Consideremos en primer lugar la función exponencial. Dado $a \in \mathbb{R}$, tenemos evidentemente $\exp^{(k)}(a) = e^a$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por tanto, la serie de Taylor de la función exponencial centrada en el punto a es

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{e^a}{n\,!}(x-a)^n$$

y la fórmula de Taylor nos dice que

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^a}{k\,!}(x-a)^k + \frac{e^c}{(n+1)\,!}(x-a)^{n+1} \qquad \forall a, x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{9}$$

donde c pertenece al intervalo abierto de extremos a y x. Por tanto, $c - a \leqslant |c-a| < |x-a|$ y, usando la fórmula de adición junto con el crecimiento de la función exponencial, obtenemos: $e^c = e^a e^{c-a} \leqslant e^{a+|x-a|}$. De (9) deducimos entonces que

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{e^a}{k\,!} \right| \leqslant \frac{e^{a+|x-a|}}{(n+1)\,!}|x-a|^{n+1} \quad \forall a, x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{10}$$

Fijados $a, x \in \mathbb{R}$, recordamos que la sucesión que aparece en el segundo miembro de (10) converge a cero. Obtenemos así los desarrollos en serie de Taylor de la función exponencial:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n\,!}(x-a)^n \qquad \forall a, x \in \mathbb{R}$$

El caso $a = 0$ tiene especial interés:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n\,!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Como segundo ejemplo consideremos la función seno. Para calcular sus derivadas sucesivas, conviene observar que

$$\operatorname{sen}'(a) = \cos a = \operatorname{sen}\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

de donde deducimos inmediatamente por inducción que

$$\operatorname{sen}^{(n)}(a) = \operatorname{sen}\left(a + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Por tanto, la serie de Taylor de la función seno centrada en el punto $a \in \mathbb{R}$ es

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{\operatorname{sen}^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\operatorname{sen}\left(a + \frac{n\pi}{2}\right)}{n\,!}(x-a)^n$$

Usando la fórmula de Taylor, obtenemos

$$\left| \operatorname{sen} x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{sen}^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k \right| = \left| \frac{\operatorname{sen}\left(c + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(n+1)\,!}(x-a)^{n+1} \right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)\,!}$$

De aquí deducimos los desarrollos en serie de Taylor de la función seno:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(a + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-a)^n \quad \forall a, x \in \mathbb{R}$$

De nuevo, el caso $a = 0$ tiene especial interés. Para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos evidentemente que $\operatorname{sen}^{(2k)}(0) = 0$ mientras que $\operatorname{sen}^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Para $x \in \mathbb{R}$ podemos pues escribir:

$$\operatorname{sen} x = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{2n+1} \frac{\operatorname{sen}^{(j)}(0)}{j!} x^j \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Razonando de manera análoga, se prueba que

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

9.8. Ejercicios

1. Sea $f \in D^2(\mathbb{R})$ tal que

$$f''(x) + f(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(0) = 0, \ f'(0) = 1$$

   Probar que $f(x) = \operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Estudiar el comportamiento en el origen de la función $h : A \to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $A =]-\pi/2, \pi/2[\setminus \{0\}, \quad h(x) = \dfrac{(\operatorname{tg} x)(\operatorname{arc\,tg} x) - x^2}{x^6} \quad \forall x \in A$

   (b) $A = \mathbb{R}^*, \quad h(x) = \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{6x^2} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^5} \quad \forall x \in A$

3. Encontrar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

   (b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

   (c) $f(x) = x^2 \log |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(0) = 0$

4. Sea I un intervalo y $f \in D^2(I)$ tal que

$$f''(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

   Probar que, si existe $a \in I$ tal que $f(a) = f'(a) = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in I$.