Tema 8

Derivadas de las funciones trigonométricas

Completamos en este tema la derivación de las principales funciones reales de variable real que venimos manejando, estudiando la derivabilidad de las funciones trigonométricas y sus inversas. Ello nos permitirá, como una nueva aplicación del Teorema del Valor Medio, probar las identidades trigonométricas más usuales y, en general, mejorar sustancialmente el conocimiento de las funciones trigonométricas y sus inversas. Encontraremos también nuevas aplicaciones de las reglas de l'Hôpital, así como el ejemplo, varias veces prometido, de una función derivable en un intervalo cuya derivada no es continua.

8.1. Derivada del arco coseno

Para la derivación de las funciones trigonométricas seguiremos el mismo camino usado en su momento para definirlas, empezando por la función arco coseno.

- *La función arco coseno es derivable en* $]-1,1[$ *con*

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[\tag{1}$$

y no es derivable en 1 *ni en* -1.

Para la demostración debemos obviamente recordar la función arco coseno y la notación que se usó para definirla. La semicircunferencia unidad era la curva $\Gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\Gamma(t) = \big(t, \psi(t)\big) = \big(t, \sqrt{1-t^2}\big) \quad \forall t \in [-1,1]$$

Usaremos que la función ψ es derivable en $]-1,1[$ con

$$\psi'(t) = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \quad \forall t \in]-1,1[$$

Sabemos que Γ es rectificable con longitud $\Lambda(\Gamma) = \pi$. Para $x \in [-1,1]$ denotamos por Γ_x a la restricción de Γ al intervalo $[x,1]$, que también es rectificable, y recordamos la definición del arco coseno:

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi], \quad \arccos x = \Lambda(\Gamma_x) \quad \forall x \in [-1,1]$$

Dados $x,y \in [-1,1]$ con $x < y$, denotamos por $\gamma_{x,y}$ a la restricción de Γ al intervalo $[x,y]$, que también es una curva rectificable, verificándose que

$$\arccos x - \arccos y = \Lambda(\gamma_{x,y}) \tag{2}$$

Pues bien, suponiendo $x \geqslant 0$, el Teorema del Valor Medio nos dará estimaciones por defecto y por exceso de esta longitud, que nos llevarán fácilmente al resultado deseado.

Suponemos $0 \leqslant x < y < 1$ y aplicamos el Teorema del Valor Medio a la restricción de ψ al intervalo $[x,y]$, que es derivable en dicho intervalo, obteniendo $c \in]x,y[$ tal que

$$\psi(y) - \psi(x) = \psi'(c)\,(y-x) = \frac{-c}{\sqrt{1-c^2}}\,(y-x)$$

Denotando como siempre por d a la distancia euclídea en el plano, deducimos claramente que

$$\begin{aligned}\Lambda(\gamma_{x,y}) &\geqslant d\big(\Gamma(x),\Gamma(y)\big) = \Big[(y-x)^2 + \big(\psi(y)-\psi(x)\big)^2\Big]^{1/2} \\ &= \big[1 + \psi'(c)^2\big]^{1/2}\,(y-x) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\,(y-x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,(y-x)\end{aligned} \tag{3}$$

y tenemos la estimación por defecto que buscábamos.

Para obtener la estimación por exceso, fijamos una partición $P = \{x = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = y\}$ del intervalo $[x,y]$. Para $k = 1,2,\ldots,n$, aplicamos de nuevo el Teorema del Valor Medio a la restricción de ψ al intervalo $[t_{k-1},t_k]$, obteniendo $c_k \in]t_{k-1},t_k[$ tal que

$$\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}) = \psi'(c_k)\,(t_k - t_{k-1}) = \frac{-c_k}{\sqrt{1-c_k^2}}\,(y-x)$$

Razonando como ya hicimos antes obtenemos

$$d\big(\Gamma(t_{k-1}),\Gamma(t_k)\big) = \frac{1}{\sqrt{1-c_k^2}}\,(t_k - t_{k-1}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,(t_k - t_{k-1})$$

Para la longitud de la poligonal asociada a la partición P obtenemos entonces que

$$\lambda(\gamma_{x,y},P) = \sum_{k=1}^{n} d\big(\Gamma(t_{k-1}),\Gamma(t_k)\big) \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,(y-x)$$

Puesto que esta desigualdad es válida para toda partición P del intervalo $[x,y]$ deducimos

$$\Lambda(\gamma_{x,y}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,(y-x) \tag{4}$$

que es la estimación por exceso buscada.

En resumen, en vista de (2), las desigualdades (3) y (4) nos dicen que

$$0 \leqslant x < y < 1 \implies \frac{y-x}{\psi(x)} \leqslant \operatorname{arc\,cos} x - \operatorname{arc\,cos} y \leqslant \frac{y-x}{\psi(y)}$$

Equivalentemente, dividiendo por el número negativo $x-y$, las desigualdades se invierten y obtenemos

$$0 \leqslant x < y < 1 \implies \frac{-1}{\psi(y)} \leqslant \frac{\operatorname{arc\,cos} x - \operatorname{arc\,cos} y}{x-y} \leqslant \frac{-1}{\psi(x)} \tag{5}$$

Las cosas son ya bastante inmediatas, pues esta desigualdad encierra toda la información que necesitamos.

Sea $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ la restricción de la función arco coseno al intervalo $[0,1[$. Para $a \in]0,1[$, podemos aplicar (5) con $y = a$, y usando la continuidad de la función ψ obtenemos claramente

$$f'(a-) = \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{-1}{\psi(a)}$$

Por otra parte, para $a \in [0,1[$ podemos tomar en (5) $x = a$ y de nuevo la continuidad de ψ nos da

$$f'(a+) = \lim_{y\to a+} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = \frac{-1}{\psi(a)}$$

Por tanto, f es derivable en $[0,1[$ con

$$f'(x) = \frac{-1}{\psi(x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in [0,1[$$

Sea ahora g la restricción del arco coseno al intervalo $]-1,0]$. Sabemos que

$$g(x) = \operatorname{arc\,cos} x = \pi - \operatorname{arc\,cos}(-x) = \pi - f(-x) \quad \forall x \in]-1,0]$$

luego la regla de la cadena nos dice que g es derivable en $]-1,0]$ con

$$g'(x) = f'(-x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,0]$$

Ha llegado el momento de eliminar las restricciones. Para $x \in]-1,1[$ con $x \neq 0$, el carácter local del concepto de derivada junto con la derivabilidad de f (si $x > 0$) o la de g (si $x < 0$) nos dicen que la función arco coseno es derivable en x y su derivada tiene el valor esperado. Para $x = 0$ simplemente tenemos

$$\operatorname{arc\,cos}'(0+) = f'(0) = -1 = g'(0) = \operatorname{arc\,cos}'(0-)$$

luego también tenemos la derivabilidad en 0 con el valor esperado de la derivada. Así pues, hemos probado que la función arco coseno es derivable en $]-1,1[$ verificándose (1).

Finalmente, puesto que la función arco coseno es continua en $[-1,1]$, derivable en $]-1,1[$ y su función derivada diverge negativamente tanto en 1 como en -1, un corolario de la primera regla de l'Hôpital visto en el tema anterior nos dice que la función arco coseno no es derivable en dichos puntos. ■

8.2. Derivadas del seno y el coseno

Estudiada la derivabilidad de la función arco coseno, para lo que ha sido esencial el Teorema del Valor Medio, la derivación de las funciones trigonométricas y sus inversas se deduce ya casi mecánicamente de las reglas de derivación. Sólo en un punto concreto necesitaremos el mismo corolario de la primera regla de l'Hôpital que acabamos de usar.

- *Las funciones seno y coseno son derivables en* $\mathbb{R}$ *con*

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos x, \quad \text{y} \quad \cos'(x) = -\operatorname{sen} x \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Para $x \in]0,\pi[$ tomamos $y = \arccos x$ con lo que tenemos $y \in]-1,1[$ con $\cos y = x$. Puesto que el arco coseno es derivable en y con $\arccos'(y) \neq 0$, y su inversa, que es la restricción de la función coseno al intervalo $[0,\pi]$, es continua en x, la regla de derivación de la función inversa nos dice que dicha restricción es derivable en x y su derivada se calculará enseguida. El carácter local del concepto de derivada nos dice que la función coseno es derivable en el punto x con

$$\cos'(x) = \frac{1}{\arccos'(y)} = -\sqrt{1-y^2} = -\sqrt{1-\cos^2 x} = -\operatorname{sen} x \quad \forall x \in]0,\pi[$$

Nótese que en los puntos 0 y π la regla de derivación de la función inversa no da información.

Usamos ahora que $\operatorname{sen} x = (1-\cos^2 x)^{1/2}$ para todo $x \in]0,\pi[$, con lo que la reglas básicas de derivación, y otra vez el carácter local de la derivada, nos dicen que la función seno es derivable en $]0,\pi[$ con

$$\operatorname{sen}'(x) = \frac{1}{2}(1-\cos^2 x)^{-1/2}(-2\cos x)(-\operatorname{sen} x) = \cos x \quad \forall x \in]0,\pi[$$

Sea $k \in \mathbb{Z}$ y consideremos el intervalo $J =]k\pi,(k+1)\pi[$. Para $x \in J$ tenemos $x - k\pi \in]0,\pi[$ y sabemos que

$$\cos x = (-1)^k \cos(x-k\pi), \qquad \operatorname{sen} x = (-1)^k \operatorname{sen}(x-k\pi)$$

Lo ya demostrado, la regla de la cadena y el carácter local de la derivada nos dicen que las funciones seno y coseno son derivables en J con

$$\begin{aligned}\cos' x &= (-1)^k \cos'(x-k\pi) = -(-1)^k \operatorname{sen}(x-k\pi) = -\operatorname{sen} x\\ \operatorname{sen}' x &= (-1)^k \operatorname{sen}'(x-k\pi) = (-1)^k \cos(x-k\pi) = \cos x\end{aligned}$$

Si $x \notin \{m\pi : m \in \mathbb{Z}\}$ podemos tomar en el razonamiento anterior $k = E(x/\pi)$ con lo que $x \in J$ y por tanto seno y coseno son derivables en el punto x con las derivadas deseadas.

Finalmente, si $x = m\pi$ con $m \in \mathbb{Z}$, usamos el intervalo $I =](m-1)\pi,(m+1)\pi[$. Sabemos que las funciones seno y coseno son continuas en I, derivables en $I \setminus \{x\}$ y sus funciones derivadas tienen límite en el punto x. El corolario ya comentado de la primera regla de l'Hôpital nos dice que las funciones seno y coseno son también derivables en x con

$$\cos'(x) = \lim_{y\to x} \cos'(y) = -\operatorname{sen} x, \qquad \operatorname{sen}'(x) = \lim_{y\to x} \operatorname{sen}'(y) = \cos x \qquad \blacksquare$$

Resaltemos dos límites de funciones que merece la pena recordar. El primero no es más que la derivabilidad en 0 de la función seno, el segundo se deduce de la primera regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2}$$

El uso del Teorema del Valor Medio para derivar el arco coseno, y el de la regla de l'Hôpital para el seno y el coseno, explican que hayamos esperado hasta ahora para calcular esas derivadas.

Veamos ahora una útil caracterización de las funciones seno y coseno:

- *Sean* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funciones derivables en* $\mathbb{R}$ *verificando que:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(0)=0 \\ g'(x) &= -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(0)=1 \end{aligned}$$

Se tiene entonces que $f(x) = \operatorname{sen} x$ *y* $g(x) = \cos x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Considerando la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$h(x) = \big(f(x) - \operatorname{sen} x\big)^2 + \big(g(x) - \cos x\big)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

basta evidentemente probar que h es idénticamente nula. Usando la hipótesis, junto con las derivadas del seno y el coseno, se comprueba sin ninguna dificultad que h es derivable en $\mathbb{R}$ con $h'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto h es constante, pero es claro que $h(0) = 0$, luego $h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, como se quería. ■

8.3. Fórmulas de adición

Podemos ya probar muy fácilmente lo siguiente:

- *Para cualesquiera* $x, y \in \mathbb{R}$ *se tiene:*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

Para comprobarlo usamos una idea recién aprendida. Fijado $y \in \mathbb{R}$, consideramos la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{aligned} h(x) = {} & \big(\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y\big)^2 \\ & + \big(\cos(x+y) - \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\big)^2 \end{aligned}$$

Observamos sin dificultad que h es derivable en $\mathbb{R}$ con $h'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego h es constante en $\mathbb{R}$, pero es evidente que $h(0) = 0$, luego h es idénticamente nula, de donde se deducen claramente las dos igualdades buscadas. ■

De las fórmulas de adición se deduce que las funciones seno y coseno pueden obtenerse una de otra mediante una traslación, así como otras identidades trigonométricas útiles. Enunciamos algunas de ellas, cuya comprobación es inmediata:

Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, *se tiene:*

- $\cos x = \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \quad \operatorname{sen} x = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
- $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
- $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \quad \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

8.4. Una derivada que no es continua

Podemos ya presentar un ejemplo de una función derivable en un intervalo, cuya derivada no es continua en dicho intervalo. Construir tal ejemplo sin usar las funciones trigonométricas hubiera sido más laborioso.

- *La función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(0) = 0$$

es derivable en $\mathbb{R}$, *pero su derivada no es continua en* 0.

Tenemos claramente que f es derivable en $\mathbb{R}^*$ con

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

pero también es claro que f es derivable en 0, ya que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x) = 0$. Que f' no es continua en 0 se deduce de $\left\{f'\left(\frac{1}{n\pi}\right)\right\} = \left\{(-1)^{n+1}\right\}$. ■

La función f del ejemplo anterior nos sirve para mostrar, como ya habíamos avisado, que las implicaciones de la primera regla de l'Hôpital (lo hacemos sólo para una de ellas) no son reversibles. En efecto, tomando $g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, las funciones f y g cumplen las hipótesis de dicha regla: son incluso funciones derivables en $\mathbb{R}$ con $g'(x) = 1 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $f(0) = g(0) = 0$. Además, hemos visto que $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x)/g(x)\big) = f'(0) = 0$, pero también hemos visto que el cociente $f'/g' = f'$ no tiene límite en 0.

8.5. Otras funciones trigonométricas

Obtenidas las derivadas de las funciones seno y coseno, probar que las otras cuatro funciones trigonométricas son derivables en todo su conjunto de definición y calcular sus derivadas es pura rutina. Enunciamos los resultados, que se deducen de las reglas básicas de derivación.

Consideremos los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{(\pi/2) + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

- *La función tangente es derivable en A con* $\operatorname{tg}'(x) = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad \forall x \in A$.
- *La función secante es derivable en A con* $\sec'(x) = \sec x \operatorname{tg} x \quad \forall x \in A$.
- *La función cotangente es derivable en B con* $\operatorname{cotg}'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x \quad \forall x \in B$.
- *La función cosecante es derivable en B con* $\operatorname{cosec}'(x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \quad \forall x \in B$.

Con respecto a las funciones trigonométricas inversas, estudiado ya el arco coseno, veamos la derivabilidad del arco seno, inversa de la restricción del seno al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Puesto que $\operatorname{sen}'(x) = \cos x \neq 0$ para $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, pero $\operatorname{sen}'(-\pi/2) = \operatorname{sen}'(\pi/2) = 0$, obtenemos lo siguiente.

- *La función arco seno es derivable en* $]-1, 1[$ *con*
$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$$
y no es derivable en los puntos 1 *y* -1.

En efecto, para $x \in]-1, 1[$, tomamos $y = \operatorname{arc\,sen} x \in]-\pi/2, \pi/2[$ y obtenemos

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Observamos que la suma de las funciones arco coseno y arco seno es una función continua en $[-1, 1]$ y derivable en $]-1, 1[$ con derivada idénticamente nula, luego es constante. De hecho tenemos

$$\operatorname{arc\,cos} x + \operatorname{arc\,sen} x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Concluimos con el arco tangente, función inversa de la restricción de la tangente al intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$. Tenemos ahora $\operatorname{tg}'(x) \neq 0$ para todo $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, de donde deducimos lo siguiente.

- *La función arco tangente es derivable en $\mathbb{R}$ con:*
$$\operatorname{arc\,tg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En efecto, para $x \in \mathbb{R}$, tomamos $y = \operatorname{arc\,tg} x$ y obtenemos que

$$\operatorname{arc\,tg}'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(y)} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

8.6. Ejercicios

1. Probar que
$$\begin{aligned} \cos(\pi/4) &= \operatorname{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \\ \cos(\pi/3) &= \operatorname{sen}(\pi/6) = 1/2 \\ \cos(\pi/6) &= \operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \end{aligned}$$

2. Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a^2+b^2=1$ y $a \neq -1$. Sea $x \in]-\pi,\pi[$ tal que $\cos x = a$ y $\operatorname{sen} x = b$. Probar que
$$x = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{1+a}$$

3. Probar que
$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\frac{x}{|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

4. Dado $a \in \mathbb{R}^*$, determinar la imagen de la función $f : \mathbb{R} \setminus \{1/a\} \to \mathbb{R}$ definida por
$$\operatorname{arc\,tg} a + \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg}\frac{a+x}{1-ax} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1/a\}$$

5. Probar que para todo $x \in]0,\pi/2[$ se tiene
$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{y} \quad \frac{2x}{\pi} < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

6. Calcular las imágenes de las funciones $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por
$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(0)=1$$

7. Probar que
$$|\operatorname{sen}(nx)| \leqslant n\,|\operatorname{sen} x| \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

8. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se considera la función $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = x^\alpha \operatorname{sen}\frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(0)=0$$
Estudiar la continuidad y derivabilidad de f, así como la continuidad de su derivada.

9. Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de las funciones $f,g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dadas por
$$f(x) = \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\log x}, \qquad g(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x+1} - \operatorname{sen}\sqrt{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

10. Estudiar el comportamiento en el origen de la función $h : A \to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $A = \mathbb{R}^+, \quad h(x) = \dfrac{1 - \cos x}{\sqrt{x}} \quad \forall x \in A$

(b) $A =]0, \pi/2[, \quad h(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^{1/x} \quad \forall x \in A$

(c) $A =]0, \pi/2[, \quad h(x) = \left(\cos x + \dfrac{x^2}{2}\right)^{1/x^2} \quad \forall x \in A$

(d) $A =]0, \pi/2[, \quad h(x) = \left(1 + \operatorname{tg} x\right)^{1/x^2} \quad \forall x \in A$

(e) $A = \mathbb{R}^+, \quad h(x) = x^{\operatorname{sen} x} \quad \forall x \in A$

(f) $A =]0, \pi/2[, \quad h(x) = \dfrac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{\operatorname{sen}^3 x} \quad \forall x \in A$

11. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

(a) $\left\{ n \, \dfrac{\sqrt[n]{e} - e^{\operatorname{sen}(1/n)}}{1 - n \operatorname{sen}(1/n)} \right\}$

(b) $\left\{ \left(\dfrac{1 + \operatorname{tg}(1/n)}{1 - \operatorname{tg}(1/n)} \right)^n \right\}$

(c) $\left\{ \dfrac{n^3 \operatorname{sen}(1/n) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{(n+1) \cos\left(\frac{\pi n + 2}{4n+1}\right)} \right\}$

12. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, estudiar la convergencia de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{n} \right)^{\alpha}$

(b) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \left(\operatorname{tg} \frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n} \right)^{\alpha}$

(c) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \left(\log n \operatorname{sen} \left(\frac{\log n}{\sqrt{n}} \right) \right)^{\alpha}$