

Reglas de l'Hôpital

Estudiamos en este tema el método práctico más efectivo para calcular límites de funciones en los que se presenta una indeterminación del tipo $[0/0]$, o $[\infty/\infty]$. Este método se atribuye al matemático francés Guillaume de l'Hôpital (1661-1704), aunque el descubrimiento se debe más bien a su maestro, el matemático suizo Johann Bernouilli (1667-1748). El principio general consiste en que, con las hipótesis adecuadas, el comportamiento (convergencia o divergencia) del cociente f'/g' entre las derivadas de dos funciones (en un punto de la recta real, por la izquierda o por la derecha, en $+\infty$ o en $-\infty$) implica el mismo tipo de comportamiento para el cociente f/g entre las dos funciones. A la hora de concretar esta idea general, se comprende que serían necesarios demasiados enunciados para estudiar uno a uno todos los casos. Presentaremos solamente dos enunciados, conocidos como primera y segunda reglas de l'Hôpital, mostrando que a partir de ellos puede resolverse cualquier otro de los casos.

7.1. Teorema del Valor Medio Generalizado

Se conoce con este nombre la siguiente versión del Teorema del Valor Medio, que resulta especialmente indicada para estudiar las reglas de l'Hôpital:

Teorema. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en $]a, b[$. Entonces, existe $c \in]a, b[$ verificando que:

$$(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c) \tag{1}$$

Demostración. Consideramos una función $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, que se visualiza muy bien usando determinantes. Para $x \in [a, b]$ definimos:

$$\begin{aligned} h(x) &= \begin{vmatrix} 1 & f(x) & g(x) \\ 1 & f(a) & g(a) \\ 1 & f(b) & g(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f(a) \\ 1 & f(b) \end{vmatrix} g(x) - \begin{vmatrix} 1 & g(a) \\ 1 & g(b) \end{vmatrix} f(x) + \begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix} \\ &= (f(b) - f(a)) g(x) - (g(b) - g(a)) f(x) + f(a) g(b) - f(b) g(a) \end{aligned}$$

Es evidente que h es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$, con

$$h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x) \quad \forall x \in]a, b[$$

También es evidente que $h(a) = h(b) = 0$. Por el Teorema de Rolle, existe $c \in]a, b[$ tal que $h'(c) = 0$, que es precisamente la igualdad buscada. ■

El nombre del teorema anterior se explica porque, tomando $g(x) = x$ para todo $x \in [a, b]$, obtenemos para f la tesis del Teorema del Valor Medio. Nótese además que en la demostración anterior no hemos usado el Teorema del Valor Medio, sino directamente el Teorema de Rolle.

Conviene comentar que si hubiésemos aplicado directamente a las funciones f y g el Teorema del Valor Medio, no habríamos obtenido la conclusión buscada. Tendríamos puntos $u, v \in]a, b[$ verificando que

$$f(b) - f(a) = f'(u)(b - a) \quad \text{y} \quad g(b) - g(a) = g'(v)(b - a)$$

de donde obtendríamos

$$(f(b) - f(a))g'(v) = (g(b) - g(a))f'(u)$$

igualdad que está todavía lejos de (1) porque nada nos permite asegurar que sea $u = v$.

La situación se ejemplifica muy bien tomando

$$a = 0, \quad b = 1, \quad f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3 \quad \forall x \in [0, 1]$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) = f'(u)(b - a) &\Leftrightarrow b^2 - a^2 = 2u(b - a) \Leftrightarrow u = \frac{1}{2} \\ g(b) - g(a) = g'(v)(b - a) &\Leftrightarrow b^3 - a^3 = 3v^2(b - a) \Leftrightarrow v = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

de modo que no podemos conseguir $u = v$, pero la igualdad que realmente buscamos es

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (b^2 - a^2)3c^2 = (b^3 - a^3)2c = (g(b) - g(a))f'(c)$$

es decir, $3c^2 = 2c$, que se verifica obviamente para $c = 2/3$.

Explicuemos ahora por adelantado el interés de la versión generalizada del Teorema del Valor Medio recién obtenida. Suponiendo $f(a) = g(a) = 0$, si podemos asegurar (ya veremos cómo) que $g(b) \neq 0$ y $g'(c) \neq 0$, la igualdad (1) toma la forma

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

y esto abre el camino para relacionar los cocientes f/g y f'/g' . El trabajo que nos queda por hacer es poner las hipótesis adecuadas para conseguir que la idea anterior dé resultado.

7.2. Primera regla de l'Hôpital

Empezamos trabajando con una indeterminación del tipo $[0/0]$. Como ya hemos venido haciendo, al hablar de un intervalo, lo suponemos no vacío y no reducido a un punto.

Teorema. Sea I un intervalo, $a \in I$ y $f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones verificando:

- (a) f y g son derivables en $I \setminus \{a\}$
- (b) $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

Entonces se tiene que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$, con lo que las funciones f/g y f'/g' están definidas en $I \setminus \{a\}$ y se verifica que:

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

(ii) Si f'/g' diverge positivamente, diverge negativamente, o simplemente diverge, en el punto a , lo mismo le ocurre a f/g .

Demostración. Observemos para empezar que la hipótesis (c) nos permite extender las funciones f y g , definiendo $f(a) = g(a) = 0$, para obtener funciones continuas en el punto a . Podemos seguir denotando por f y g a las extensiones así obtenidas, pues el carácter local del concepto de derivada hace que se sigan verificando las hipótesis (a) y (b), y la tesis que se busca no involucra para nada los valores que hemos dado a nuestras funciones en el punto a . En resumen, podemos suponer que $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas en I con $f(a) = g(a) = 0$, y derivables en $I \setminus \{a\}$ con $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$.

Para obtener la primera afirmación del teorema, sea $x \in I \setminus \{a\}$. Si $a < x$, puesto que g es continua en el intervalo $[a, x] \subset I$ y derivable en $]a, x[\subset I \setminus \{a\}$, el Teorema del Valor Medio nos proporciona un $c \in]a, x[$ verificando que $g(x) - g(a) = g'(c)(x - a)$, pero por hipótesis tenemos $g'(c) \neq 0$, luego $g(x) \neq 0$. Si $x < a$, razonando con el intervalo $[x, a]$ llegamos a la misma conclusión.

De nuevo para $x \in I$ con $a < x$, las funciones f y g son continuas en $[a, x]$ y derivables en $]a, x[$, luego por el Teorema del Valor Medio Generalizado existe $c_x \in]a, x[$ tal que

$$(f(x) - f(a))g'(c_x) = (g(x) - g(a))f'(c_x) \quad \text{es decir,} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

En el caso $x < a$ haríamos el mismo razonamiento con el intervalo $[x, a]$ obteniendo la misma conclusión, sólo que ahora $c_x \in]x, a[$. En ambos casos tenemos $0 < |c_x - a| < |x - a|$ y hemos probado:

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \quad \exists c_x \in I : 0 < |c_x - a| < |x - a| \quad \text{y} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \quad (2)$$

El resto de la demostración es ya bastante inmediato:

(i). Dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$y \in I, \quad 0 < |y - a| < \delta \implies \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - L \right| < \varepsilon \quad (3)$$

Entonces, para $x \in I$ con $0 < |x - a| < \delta$, al aplicar (2) tenemos $0 < |c_x - a| < \delta$, luego podemos usar (3) con $y = c_x$, para obtener

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L \right| < \varepsilon$$

(ii). Si f'/g' diverge positivamente en a , dado $K \in \mathbb{R}$ tenemos $\delta > 0$ tal que

$$y \in I, \quad 0 < |y - a| < \delta \implies \frac{f'(y)}{g'(y)} > K \quad (3')$$

Para $x \in I$ con $0 < |x - a| < \delta$, aplicando (2) y (3') concluimos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} > K$$

Si f'/g' diverge negativamente en a , basta aplicar lo anterior, cambiando f por $-f$. Finalmente, si sólo sabemos que f'/g' diverge en a , dado $K \in \mathbb{R}$ tenemos $\delta > 0$ tal que

$$y \in I, \quad 0 < |y - a| < \delta \implies \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} \right| > K \quad (3'')$$

con lo que al aplicar (2) y (3'') obtenemos

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \right| > K$$

lo que prueba que f/g también diverge en el punto a . ■

Como ejemplo sencillo de aplicación de la regla anterior, veamos el comportamiento en 0 de la función $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Para ello tomamos $I = \mathbb{R}$, $a = 0$, $f(x) = e^x - 1 - x$ y $g(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Claramente f y g son derivables en \mathbb{R}^* con $f'(x) = e^x - 1$ y $g'(x) = 2x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$. También es claro que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Aplicando la derivabilidad en 0 de la función exponencial tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$$

y la regla de l'Hôpital nos dice que también

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}$$

Volviendo al caso general, conviene observar que el cociente f'/g' , cuyo comportamiento se debe estudiar para poder aplicar la regla de l'Hôpital, puede cumplir también las hipótesis de dicha regla, lo que permite aplicarla reiteradamente. Por ejemplo, usándola dos veces tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{6x} = \frac{1}{6}$$

Es importante resaltar que las implicaciones de la regla de l'Hôpital no son reversibles: para funciones $f, g : I \setminus \{a\}$ verificando las hipótesis (a), (b) y (c) de dicha regla, puede ocurrir que el cociente f/g tenga límite en el punto a pero el cociente f'/g' no lo tenga. Más adelante veremos algún ejemplo de esta situación.

Ni que decir tiene, la regla de l'Hôpital puede aplicarse al cálculo de límites laterales o divergencia lateral de una función en un punto, pues se trata de los límites ordinarios o la divergencia ordinaria en dicho punto de una conveniente restricción de la función dada.

Por sorprendente que pueda parecer, la regla de l'Hôpital puede usarse para estudiar la derivabilidad de una función en un punto, pues al fin y al cabo se trata de estudiar la existencia del límite de un cociente entre dos funciones para el que, si la función es continua en el punto en cuestión, tendremos una indeterminación del tipo $[0/0]$. Veamos la forma en que se concreta esta idea:

- Sea J un intervalo, $a \in J$ y $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $J \setminus \{a\}$ y continua en el punto a .
 - (i) Si h' tiene límite en a , entonces h es derivable en a con $h'(a) = \lim_{x \rightarrow a} h'(x)$.
 - (ii) Si h' diverge en a , entonces h no es derivable en a .
 - (iii) Suponiendo que $a \in J^\circ$, si h' tiene límite por la izquierda y por la derecha en a pero $\lim_{x \rightarrow a^-} h'(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} h'(x)$, entonces h no es derivable en a .

Por tanto, si h es derivable en J , la función derivada h' no puede tener discontinuidades evitables ni de salto.

Para la demostración consideramos las funciones $f, g : J \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = h(x) - h(a), \quad g(x) = x - a \quad \forall x \in J \setminus \{a\}$$

que son derivables en $J \setminus \{a\}$, con $f'(x) = h'(x)$ y $g'(x) = 1 \neq 0$ para todo $x \in J \setminus \{a\}$. Además, la continuidad de h en a nos dice que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y es evidente que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Para obtener (i) basta ahora aplicar la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} h'(x)$$

Pero con el mismo razonamiento obtenemos (ii):

$$|h'(x)| \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow a) \implies \left| \frac{h(x) - h(a)}{x - a} \right| \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow a)$$

luego en este caso h no es derivable en a . Para probar (iii) aplicamos (i) a las restricciones de h a los intervalos $J_1 = \{x \in J : x \leq a\}$ y $J_2 = \{x \in J : x \geq a\}$. Obtenemos que h es derivable por la izquierda y por la derecha en a pero tenemos

$$h'(a-) = \lim_{x \rightarrow a-} h'(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+} h'(x) = h'(a+)$$

luego en este caso h tampoco es derivable en a .

Supongamos finalmente que h es derivable en J . Si h' tuviese una discontinuidad evitable en un punto $a \in J$, sería $\lim_{x \rightarrow a} h'(x) \neq h'(a)$ en contradicción con (i). Si la discontinuidad fuese de salto, aplicando (iii) tendríamos que h no es derivable en a , también contradictorio. ■

7.3. Segunda regla de l'Hôpital

Esta segunda versión se aplica a indeterminaciones del tipo $[\infty/\infty]$:

Teorema. Sea I un intervalo, $a \in I$ y $f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones verificando:

- (a) f y g son derivables en $I \setminus \{a\}$
- (b) $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$
- (c) g diverge en el punto a

Entonces existe $\rho > 0$ tal que, para $x \in I$ con $0 < |x - a| < \rho$, se tiene $g(x) \neq 0$. Además, se verifica que:

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

(ii) Si f'/g' diverge positivamente, diverge negativamente, o simplemente diverge, en el punto a , lo mismo le ocurre a f/g .

Demostración. La existencia de ρ es evidente, puesto que por hipótesis g diverge en el punto a . Definiendo $B = \{x \in I \setminus \{a\} : g(x) \neq 0\}$, la función cociente está definida en B y tenemos $a \in B'$ lo que hace que tengan sentido el resto de las afirmaciones del teorema, que pasamos a probar.

La demostración es similar a la de la primera regla con la dificultad de que ahora no podemos extender las funciones f y g para que sean continuas en a . Lo que haremos será sustituir a por otro punto $y \in I$ que tomaremos tan próximo al punto a como sea necesario.

Empezaremos suponiendo que $a = \max I$. Más adelante se verá cómo podemos eliminar esta hipótesis. Podemos entonces tomar ρ suficientemente pequeño para que se tenga $a - \rho \in I$. Tenemos entonces $g(x) \neq 0$ para todo $x \in]a - \rho, a[$ y además g es inyectiva en dicho intervalo, puesto que su derivada no se anula en ningún punto del mismo.

Para $a - \rho < y < x < a$, puesto que f y g son derivables en el intervalo $[y, x]$, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio Generalizado para encontrar un punto $c_{x,y} \in]y, x[$ tal que

$$(f(x) - f(y)) g'(c_{x,y}) = (g(x) - g(y)) f'(c_{x,y})$$

Usando ahora que $g'(c_{x,y}) \neq 0$ y $g(x) \neq g(y)$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} \\ &= \frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} \end{aligned} \quad (4)$$

Esta era, como se podrá comprender, la parte clave de la demostración. Comprobar ahora la afirmaciones del teorema será algo más laborioso.

(i). Restando L en ambos miembros de (4) tenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \left(\frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} - L\right) \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) - L \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}$$

Tomando valores absolutos llegamos a

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leq \left|\frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} - L\right| \left(1 + \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|\right) + \left|\frac{f(y) - Lg(y)}{g(x)}\right| \quad (5)$$

y no conviene olvidar que esta desigualdad es válida para $a - \rho < y < x < a$, siendo $c_{x,y} \in]y, x[$.

Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis, existe $\tau > 0$, que podemos tomar con $\tau < \rho$, tal que

$$a - \tau < z < a \implies \left|\frac{f'(z)}{g'(z)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (6)$$

Fijamos entonces $y \in]a - \tau, a[$ y aplicamos que g diverge en el punto a , obteniendo $\delta > 0$ tal que $y < a - \delta$ y

$$a - \delta < x < a \implies |g(x)| > |g(y)| \quad \text{y} \quad \left|\frac{f(y) - Lg(y)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (7)$$

Finalmente, si $a - \delta < x < a$, tenemos (5) con $a - \tau < c_{x,y} < a$, lo que nos permite aplicar (6) con $z = c_{x,y}$, junto con (7), concluyendo finalmente que

$$a - \delta < x < a \implies \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{4} 2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(ii). La demostración es muy similar, incluso más sencilla, indicamos solamente los cambios necesarios. Suponiendo que f'/g' diverge positivamente en el punto a , para cada $K \in \mathbb{R}^+$ obtenemos $\tau > 0$ que ahora verifica $\tau < \rho$ y

$$a - \tau < z < a \implies \frac{f'(z)}{g'(z)} > 2(K + 1) \quad (6')$$

Seguidamente fijamos igual que antes $y \in]a - \tau, a[$ y aplicamos que g diverge en el punto a para obtener también $\delta > 0$ con $y < a - \delta$, que ahora, en lugar de (7) verifica

$$a - \delta < x < a \implies \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < 1 \quad (7')$$

Usamos ahora (4), (6') con $z = c_{x,y}$ y (7') para concluir que

$$a - \delta < x < a \implies \frac{f(x)}{g(x)} > 2(K+1) \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 1 = K$$

Si f'/g' diverge negativamente en el punto a aplicamos lo anterior, cambiando f por $-f$.

Finalmente, si sólo sabemos que f'/g' diverge en el punto a , el razonamiento es similar. Dado $K \in \mathbb{R}^+$ obtenemos $0 < \tau < \rho$ verificando ahora que

$$a - \tau < z < a \implies \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} \right| > 2(K+1) \quad (6'')$$

De nuevo, fijamos $y \in]a - \tau, a[$ y encontramos $\delta > 0$ con $y < a - \delta$ verificando (7'). Finalmente, para $a - \delta < x < a$ aplicamos (4), (6'') con $z = c_{x,y}$ y (7'), obteniendo

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \geq \left| \frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} \right| \left(1 - \left| \frac{g(y)}{g(x)} \right| \right) - \left| \frac{f(y)}{g(x)} \right| > 2(K+1) \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 1 = K$$

y esto prueba que f/g también diverge en el punto a .

Veamos finalmente como eliminar la hipótesis $a = \max I$ que ha estado presente en toda la demostración anterior:

En el caso de que fuese $a = \min I$ caben dos posibilidades, una sería repetir el proceso, trabajando a la derecha del punto a en vez de hacerlo a la izquierda. Alternativamente, podemos aplicar lo ya demostrado, usando $\hat{I} = \{x \in \mathbb{R} : -x \in I\}$, que verifica $-a = \max(\hat{I})$, y las funciones $\hat{f}, \hat{g} : \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\hat{f}(x) = f(-x)$, $\hat{g}(x) = g(-x)$ para todo $x \in \hat{I}$. Se trata obviamente de funciones derivables en $\hat{I} \setminus \{-a\}$ con $\hat{f}'(x) = -f'(-x)$ y $\hat{g}'(x) = -g'(-x) \neq 0$ para todo $x \in \hat{I} \setminus \{-a\}$ y es claro que \hat{g} diverge en $-a$. Puesto que los cocientes \hat{f}'/\hat{g}' y \hat{f}/\hat{g} tienen en $-a$ el mismo comportamiento que en a tengan f'/g' y f/g respectivamente, al aplicar lo ya demostrado a \hat{f} y \hat{g} obtenemos las conclusiones deseadas para f y g .

Queda finalmente considerar el caso $a \in I^\circ$. Restringimos entonces f y g , por una parte al intervalo $I_1 = \{x \in I : x \leq a\}$, que verifica $a = \max I_1$, y por otra a $I_2 = \{x \in I : x \geq a\}$ para el que $a = \min I_2$. Al hacer estas restricciones, se mantienen obviamente las hipótesis (a), (b) y (c) del teorema. En el caso (i), aplicando entonces lo ya demostrado, obtenemos que las restricciones de f/g a J_1 y J_2 , ambas tienen límite L en el punto a , es decir

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad \text{luego} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Para probar (ii) el razonamiento es análogo. ■

7.4. Límites en el infinito

Para completar todos los casos que pueden darse, queda analizar la adaptación de las reglas de l'Hôpital para estudiar el comportamiento en $+\infty$ o en $-\infty$ de cocientes del tipo que venimos manejando, pero esto ya es bastante sencillo.

■ Sea I un intervalo no mayorado y $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones verificando:

- (a) f y g son derivables en I
- (b) $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$

Supongamos además que se cumple una de las siguientes condiciones:

- (c.1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$
- (c.2) g diverge en $+\infty$

Entonces existe $M > 0$ tal que, para $x \in I$ con $x > M$, se tiene $g(x) \neq 0$. Además, se verifica que:

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

(ii) Si f'/g' diverge positivamente, diverge negativamente, o simplemente diverge, en $+\infty$, entonces lo mismo le ocurre a f/g .

Análogo enunciado, con las modificaciones oportunas, para el comportamiento en $-\infty$.

En primer lugar, la hipótesis (b) implica que g es estrictamente monótona, luego a lo sumo podrá anularse en un punto de I , lo que garantiza sobradamente la existencia de M . Usamos ahora el procedimiento ya conocido para reducir el estudio del comportamiento de funciones en $+\infty$ al comportamiento en 0 de funciones adecuadas. El caso de $-\infty$ tendría un tratamiento enteramente análogo.

Fijamos $\alpha \in I$, con $\alpha > M$, tomamos $J = [0, 1/\alpha[$ y definimos $\varphi, \psi : J \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\varphi(x) = f(1/x), \quad \psi(x) = g(1/x) \quad \forall x \in J \setminus \{0\}$$

Sabemos que el comportamiento en $+\infty$ del cociente f/g será el mismo que tenga φ/ψ en 0.

La regla de la cadena nos dice que φ y ψ son derivables en $J \setminus \{0\}$ con

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} f'(1/x), \quad \psi'(x) = -\frac{1}{x^2} g'(1/x) \neq 0 \quad \forall x \in J \setminus \{0\}$$

Si se verifica (c.1) tenemos claramente $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = 0$, luego φ y ψ verifican las hipótesis de la primera regla de l'Hôpital. Si se verifica (c.2), entonces ψ diverge en 0 y se cumplen las hipótesis de la segunda regla. Podemos pues aplicar la regla que proceda a las funciones φ, ψ , usando el intervalo J , para obtener el comportamiento del cociente φ/ψ en 0. Teniendo en cuenta que

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} \quad \forall x \in J \setminus \{0\}$$

el comportamiento en 0 del cociente φ'/ψ' es el mismo que tenga f'/g' en $+\infty$. Tenemos por tanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

y análogo razonamiento en los casos de divergencia. ■

7.5. Ejercicios

1. Estudiar el comportamiento de la función $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ en el punto α , en cada uno de los siguientes casos:

$$(a) A =]2, +\infty[, \quad h(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 4}} \quad \forall x \in A, \quad \alpha = 2$$

$$(b) A = \mathbb{R}^+, \quad h(x) = (e^x + x)^{1/x} \quad \forall x \in A, \quad \alpha = 0$$

$$(c) A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \quad h(x) = \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \quad \forall x \in A, \quad \alpha = 1$$

$$(d) A =]1, +\infty[, \quad h(x) = \frac{x^x - x}{1 - x - \log x} \quad \forall x \in A, \quad \alpha = 1$$

2. Estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (1+x)^{1/x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(0) = e$$

3. Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de las funciones $\varphi, \psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como sigue, con $a \in \mathbb{R}^+$:

$$\varphi(x) = \frac{\log(2 + ae^x)}{\sqrt{2 + ax^2}}, \quad \psi(x) = (a^x + x)^{1/x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función derivable en \mathbb{R}^+ y supongamos que la función $f + f'$ tiene límite en $+\infty$. Probar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

5. Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de la función $h :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

$$(a) h(x) = \frac{x(x^{1/x} - 1)}{\log x} \quad \forall x \in]1, +\infty[$$

$$(b) h(x) = (x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3} \quad \forall x \in]1, +\infty[$$

$$(c) h(x) = \left(\frac{x+5}{2x^2-1} \right)^{\frac{x-2}{x^2+3}} \quad \forall x \in]1, +\infty[$$

6. Probar que para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log(x-a)}{\log(x+a)} \right)^x = 1$.