Tema 6

Teorema del Valor Medio

Abordamos en este tema el estudio del resultado más importante del cálculo diferencial en una variable, el Teorema del Valor Medio, debido al matemático italo-francés Joseph Louis de Lagrange (1736-1813), aunque se deduce fácilmente de un caso particular establecido sin demostración por el matemático francés M. Rolle (1652-1719). Analizaremos las principales consecuencias del Teorema del Valor Medio, que tienen en común la idea básica de obtener información sobre el comportamiento de una función (monotonía, extremos relativos) a partir del conocimiento de su función derivada.

6.1. Extremos relativos

Dada una función real de variable real $f : A \to \mathbb{R}$, es natural decir que f tiene en un punto $a \in A$ un *máximo absoluto*, o que f alcanza su máximo absoluto en el punto a, cuando $f(a)$ es el máximo del conjunto $f(A)$, es decir, $f(a) \geqslant f(x)$ para todo $x \in A$. Análogamente, cuando $f(a) \leqslant f(x)$ para todo $x \in A$, decimos que f tiene en a un *mínimo absoluto*, o alcanza en a su mínimo absoluto. Obsérvese que f alcanza en a su mínimo absoluto si, y solo si, $-f$ alcanza en a su máximo absoluto. La expresión *extremo absoluto* se usa para referirse indistintamente a un máximo o un mínimo absoluto.

Los extremos relativos aparecerán al considerar una conveniente restricción de la función, pero sólo cuando el conjunto de definición A contiene un intervalo abierto centrado en el punto en cuestión. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, decimos que $a \in \mathbb{R}$ es un *punto interior* de A cuando existe $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subset A$. Llamaremos *interior* de A y denotaremos por A° al conjunto de los puntos interiores de A, que obviamente verifica $A^\circ \subset A$, pudiendo no darse la igualdad. Para un intervalo I, observamos que I° es el correspondiente intervalo abierto. Más concretamente, si I es un intervalo no vacío y acotado, es claro que $I^\circ =]\inf I, \sup I[$; si I es una semirrecta a la derecha será $I^\circ =]\inf I, +\infty[$ y si I es una semirrecta a la izquierda, $I^\circ =]-\infty, \sup I[$. Finalmente es claro que $\emptyset^\circ = \emptyset$, $\mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$.

Pues bien, decimos que la función $f : A \to \mathbb{R}$ tiene un *máximo relativo* en un punto $a \in A$ cuando existe $\delta > 0$ tal que $]a-\delta, a+\delta[\subset A$ y $f(a) \geqslant f(x)$ para todo $x \in]a-\delta, a+\delta[$. Análogamente, diremos que f tiene en a un *mínimo relativo* cuando exista $\delta > 0$ tal que $]a-\delta, a+\delta[\subset A$ y $f(a) \leqslant f(x)$ para todo $x \in]a-\delta, a+\delta[$. En ambos casos es claro que $a \in A^\circ$. De nuevo, la expresión *extremo relativo* se usa para referirse indistintamente a un máximo o un mínimo relativo.

Para dejar claro que no existe ninguna implicación entre extremos absolutos y relativos, consideremos por ejemplo la función $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 2x-4 & \text{si } 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

Es fácil ver que f tiene un mínimo absoluto en 0 que no es un mínimo relativo, y un máximo absoluto en 3 que tampoco es máximo relativo. Por otra parte, f tiene en 2 un mínimo absoluto que también es relativo y en 1 un máximo relativo que no es absoluto.

Queda claro por tanto que si una función $f : A \to \mathbb{R}$ tiene un extremo absoluto en un punto $a \in A$, entonces a puede no ser un extremo relativo de f. Lo será si, y sólo si, $a \in A^\circ$. En sentido contrario, si f tiene un extremo relativo en un punto $a \in A$, puede ocurrir que f no tenga en a un extremo absoluto. De hecho, la existencia de extremos relativos de una función no implica siquiera que la función esté acotada.

Intuitivamente, es claro que si una función tiene un extremo relativo en un punto donde es derivable, la recta tangente a la gráfica de la función en el punto correspondiente debe ser horizontal. Esta idea nos lleva a la siguiente condición necesaria para que una función derivable en un punto tenga un extremo relativo en dicho punto:

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Supongamos que f tiene un extremo relativo en un punto $a \in A$ y que f es derivable en a. Entonces $f'(a) = 0$.*

Para comprobarlo, suponemos primeramente que f tiene un máximo relativo en el punto a: existe $\delta > 0$ tal que $]a-\delta, a+\delta[\subset A$ y $f(a) \geqslant f(x)$ para todo $x \in]a-\delta, a+\delta[$. Por tanto,

$$a-\delta < x < a \implies \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0 \quad \text{y} \quad a < x < a+\delta \implies \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$$

De la primera implicación deducimos claramente que $f'(a) \geqslant 0$, y de la segunda que $f'(a) \leqslant 0$, luego $f'(a) = 0$, como se quería. En el caso de que f tenga un mínimo relativo en el punto a, usamos que $-f$ tiene un máximo relativo en a y es también derivable en a, obteniendo que $0 = (-f)'(a) = -f'(a)$, es decir, $f'(a) = 0$. ■

Aunque el resultado anterior se refiere solamente a extremos relativos, nos proporciona una regla práctica para optimizar una función, es decir, encontrar sus extremos absolutos, si es que los tiene. Concretamente, supongamos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza un extremo absoluto en un punto $a \in A$. Entonces a debe encontrarse en una de las tres situaciones siguientes:

(a) $a \in A \setminus A^\circ$.
(b) $a \in A^\circ$ y f no es derivable en a.
(c) $a \in A^\circ$ y f es derivable en a con $f'(a) = 0$.

Pues bien, llamemos B al conjunto de puntos de A que cumplan una de esas tres condiciones. Como hemos dicho, si f tiene un máximo absoluto en un punto $a \in A$, entonces $a \in B$, luego el conjunto $f(B)$ también tiene máximo y $\max f(B) = \max f(A) = f(a)$. Análogamente, si $f(A)$ tiene mínimo, también lo tendrá $f(B)$ y será $\min f(A) = \min f(B)$. Por tanto, optimizar la función f en el conjunto A equivale a optimizarla en B. Ocurre frecuentemente en la práctica que el conjunto B es finito, con lo que el conjunto $f(B)$ también es finito y resulta bien fácil encontrar su máximo y su mínimo.

6.2. Teorema de Rolle

Para sacar provecho a la condición necesaria de extremo relativo obtenida anteriormente, basta ponerse en una situación sencilla que implica la existencia de un extremo relativo. Ello se consigue de la siguiente forma:

Teorema de Rolle. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$ verificando que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Aplicando el Teorema de Weierstrass, por ser f una función continua en un intervalo cerrado y acotado, alcanza su máximo absoluto y su mínimo absoluto en dicho intervalo. Sean pues $c_1, c_2 \in [a,b]$ tales que $f(c_1) = \min f\big([a,b]\big)$ y $f(c_2) = \max f\big([a,b]\big)$. Si $c_1 \in]a,b[$, f tiene un mínimo relativo en c_1 y es derivable en c_1, luego $f'(c_1) = 0$ y basta tomar $c = c_1$. Análogamente, si $c_2 \in]a,b[$ bastará tomar $c = c_2$. Finalmente, si $c_1, c_2 \in \{a,b\}$, la hipótesis $f(a) = f(b)$ hace que se tenga $\min f\big([a,b]\big) = \max f\big([a,b]\big)$, pero entonces f es constante, luego $f'(c) = 0$ para todo $c \in]a,b[$. ■

Podemos ya obtener sin dificultad el principal resultado de este tema:

Teorema del Valor Medio. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Demostración. Basta considerar la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \big(f(b) - f(a)\big)\,x - (b-a)\,f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Claramente g es una función continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$ con

$$g'(x) = f(b) - f(a) - (b-a)\,f'(x) \qquad \forall x \in]a,b[$$

También es inmediato que $g(b) = g(a)$. Por el Teorema de Rolle, existe $c \in]a,b[$ tal que $g'(c) = 0$, es decir, $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ como se quería. ■

Los dos resultados anteriores son en realidad equivalentes, el Teorema del Valor Medio es, como se ha visto, consecuencia inmediata del de Rolle, pero lo incluye como caso particular: si se supone $f(b) = f(a)$ la igualdad $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ implica obviamente que $f'(c) = 0$.

Merece la pena comentar que las hipótesis de los dos teoremas anteriores se presentan con frecuencia, exactamente en la forma en que las hemos enunciado. Por ejemplo, la función $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ para todo $x \in [-1,1]$ es continua en $[-1,1]$ y derivable en $]-1,1[$, pero no es derivable en 1 ni en -1.

El Teorema del Valor Medio tiene una clara interpretación geométrica: existe $c \in]a,b[$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $\big(c, f(c)\big)$ tiene la misma pendiente que la recta (secante a dicha gráfica) que pasa por los puntos $\big(a, f(a)\big)$ y $\big(b, f(b)\big)$, es decir, ambas rectas son paralelas. En el resto del tema obtenemos las primeras consecuencias importantes de este teorema.

6.3. Monotonía

En lo que sigue vamos a trabajar preferentemente con funciones definidas en intervalos. Para evitar repeticiones, siempre que hablemos de un intervalo, se entenderá que contiene al menos dos puntos, con lo que su interior no es vacío. Para una función continua en un intervalo y derivable en su interior, la función derivada nos permite caracterizar fácilmente la monotonía de la función:

- *Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en I°.*
  - (i) *f es creciente si, y sólo si, $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in I^\circ$.*
  - (ii) *f es decreciente si, y sólo si, $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in I^\circ$.*

Para la demostración supongamos primero que f es creciente. Entonces, para $x, y \in I$ con $y \neq x$, se tiene $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$, y deducimos claramente que $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in I^\circ$. Para la implicación recíproca, suponiendo que $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in I^\circ$, fijamos $a, b \in I$ con $a < b$ y bastará probar que $f(a) \leqslant f(b)$. Puesto que $[a,b] \subset I$, tenemos $]a,b[\subset I^\circ$, luego podemos aplicar el Teorema del Valor Medio a la restricción de f al intervalo $[a,b]$, que es continua en dicho intervalo y derivable en su interior. Obtenemos entonces un $c \in]a,b[$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, pero $f'(c) \geqslant 0$, luego $f(b) - f(a) \geqslant 0$, como queríamos. Queda así probada la afirmación (i), que aplicada a la función $-f$ nos da (ii). ■

El resultado anterior es un criterio muy cómodo para estudiar la monotonía de una función. Veamos un ejemplo en el que ese estudio se usa para obtener una desigualdad no trivial. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ con $0 < \alpha < 1$, vamos a probar que

$$(a+b)^\alpha \leqslant a^\alpha + b^\alpha \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

De hecho, basta considerar el caso $a = 1$, pues si probamos que $(1+x)^\alpha \leqslant 1 + x^\alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, tomando $x = b/a$ obtenemos inmediatamente la desigualdad buscada.

Consideramos entonces la función $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (1+x)^\alpha - x^\alpha \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

que es continua en $\mathbb{R}_0^+$ y derivable en $\mathbb{R}^+ = (\mathbb{R}_0^+)^\circ$ con

$$f'(x) = \alpha\left((1+x)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Por ser $\alpha - 1 < 0$ tenemos $(1+x)^{\alpha-1} < x^{\alpha-1}$, lo que junto con $\alpha > 0$ nos da $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Por tanto f es decreciente en $\mathbb{R}_0^+$, luego $f(x) \leqslant f(0) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, que era la desigualdad buscada.

Frecuentemente, al estudiar la monotonía de una función podemos detectar sus extremos absolutos o relativos:

- *Consideremos un intervalo abierto $J =]a-\delta, a+\delta[$ con $a \in \mathbb{R}, \delta > 0$. Sea $f: J \to \mathbb{R}$ una función continua en J y derivable en $J \setminus \{a\}$.*
  - (i) *Si $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]a-\delta, a[$ y $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in]a, a+\delta[$, entonces f alcanza su máximo absoluto en el punto a. Como consecuencia, cualquier extensión de la función f tiene un máximo relativo en a.*
  - (ii) *Si $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in]a-\delta, a[$ y $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]a, a+\delta[$, entonces f alcanza su mínimo absoluto en a y cualquier extensión de f tiene un mínimo relativo en a.*

Para probar (i), fijamos $x \in J$ y bastará ver que $f(x) \leqslant f(a)$, pudiéndose dar dos casos. Si $x \leqslant a$ usamos que la restricción de f al intervalo $]a-\delta, a]$ es creciente, mientras que si $a \leqslant x$ usamos que la restricción de f al intervalo $[a, a+\delta[$ es decreciente. Obtenemos en ambos casos que $f(x) \leqslant f(a)$. Para probar (ii) se puede razonar análogamente o aplicar (i) a la función $-f$. ■

Consideremos por ejemplo la función racional $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

que es derivable en $\mathbb{R}$ con

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vemos que los puntos -1 y 1 son los únicos posibles extremos absolutos o relativos de f. Observamos que $f'(x) < 0$ tanto si $x < -1$ como si $x > 1$, y $f'(x) > 0$ para todo $x \in]-1, 1[$. Aplicando el resultado anterior con $a = -1$ y $\delta = 2$, obtenemos que f tiene un mínimo relativo en -1. Tomando $a = 1$ y $\delta = 2$ vemos también que f tiene un máximo relativo en 1.

De hecho podemos hacer un estudio más completo, teniendo en cuenta que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Al ser f decreciente en $]-\infty, -1]$ tenemos $0 \geqslant f(x) \geqslant f(-1) = -1/2$ para $x \leqslant -1$. Pero f también es decreciente en $[1, +\infty[$, luego $0 \leqslant f(x) \leqslant f(1) = 1/2$ para $x \geqslant 1$. Finalmente, f es creciente en $[-1, 1]$ luego $f(-1) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$ para todo $x \in [-1, 1]$. En resumen, vemos que f alcanza su mínimo absoluto en -1 y su máximo absoluto en 1, siendo $f(\mathbb{R}) = [-1/2, 1/2]$.

6.4. Funciones con derivada idénticamente nula

Como consecuencia obvia de los resultados anteriores tenemos:

- *Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en I° con $f'(x) = 0$ para todo $x \in I^\circ$. Entonces f es constante.*

En particular, una función derivable en un intervalo queda caracterizada por su función derivada, salvo una constante aditiva. En efecto, dado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, si $f, g : I \to \mathbb{R}$ son funciones derivables en I verificando que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in I$, la función $g - f$ tiene derivada idénticamente nula, luego es constante, es decir, existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + C$ para todo $x \in I$.

Trabajar en un intervalo es esencial para la validez del resultado anterior. Consideremos por ejemplo la función signo, definida por

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{|x|}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Es evidente que esta función es derivable en $\mathbb{R}^*$ con $\operatorname{sgn}'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$, es constante en $\mathbb{R}^+$ y también en $\mathbb{R}^-$, intervalos en los que podemos aplicar el resultado anterior, pero no es constante en $\mathbb{R}^*$.

Veamos un ejemplo en el que el resultado anterior se usa para obtener la solución general de una ecuación diferencial, que en particular nos da una caracterización de la función exponencial. Fijado $\alpha \in \mathbb{R}$ y dado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, intentemos encontrar todas las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ derivables en I que verifiquen $f'(x) = \alpha f(x)$ para todo $x \in I$. Dada una tal función f, escribimos $g(x) = f(x)e^{-\alpha x}$ para todo $x \in I$, obteniendo una función $g : I \to \mathbb{R}$ que claramente es derivable en I, con $g'(x) = \big(f'(x) - \alpha f(x)\big)e^{-\alpha x} = 0$ para todo $x \in I$, luego g es constante. Deducimos que existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = Ce^{\alpha x}$ para todo $x \in I$. Tenemos así la solución general de la ecuación diferencial $y' = \alpha y$ en cualquier intervalo $I \subset \mathbb{R}$, obtenida a partir de una solución concreta, previamente conocida. Como caso particular obtenemos la siguiente caracterización de la función exponencial:

- *La exponencial es la única función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en $\mathbb{R}$, que coincide con su función derivada y verifica que $f(0) = 1$.*

Como otra aplicación interesante del último resultado, veremos que la fórmula de adición para la función exponencial puede deducirse directamente de la caracterización recién obtenida. Para ello, fijado $a \in \mathbb{R}$, consideramos la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = e^{a+x}e^{-x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Claramente h es derivable en $\mathbb{R}$ con $h'(x) = e^{a+x}e^{-x} - e^{a+x}e^{-x} = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego h es constante. Puesto que $h(0) = e^a$, tenemos $h(x) = e^a$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pero a también era arbitrario, luego hemos probado que $e^{a+x}e^{-x} = e^a$ para cualesquiera $a, x \in \mathbb{R}$. Esta igualdad es claramente equivalente a la fórmula de adición, pues dados $u, v \in \mathbb{R}$, basta tomar $a = u + v$ y $x = -v$ para obtener $e^u e^v = e^{u+v}$.

6.5. Monotonía estricta

Aplicando una vez más el Teorema del Valor Medio obtenemos:

- *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en I°, con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I^\circ$. Entonces f es estrictamente monótona y como consecuencia se tiene que, o bien $f'(x) > 0$ para todo $x \in I^\circ$, o bien $f'(x) < 0$ para todo $x \in I^\circ$.*

Para demostrarlo, tomados $x, y \in I$ con $x < y$, aplicamos el Teorema del Valor Medio a la restricción de f al intervalo $[x, y]$ que es una función continua en dicho intervalo y derivable en su interior. Obtenemos $c \in]x, y[\subset I^\circ$ tal que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Pero $f'(c) \neq 0$, luego $f(y) \neq f(x)$ y hemos probado que f es inyectiva. Por ser f una función continua e inyectiva en el intervalo I, concluimos que f es estrictamente monótona en dicho intervalo. Está claro entonces que si f es creciente se tendrá $f'(x) > 0$ para todo $x \in I^\circ$, y si f es decreciente será $f'(x) < 0$ para todo $x \in I^\circ$. ■

Conviene resaltar que la condición suficiente para la monotonía estricta de una función derivable que acabamos de obtener, no es necesaria. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es estrictamente creciente y derivable en $\mathbb{R}$, pero su derivada se anula en un punto: $f'(0) = 0$. En resumen, tenemos:

- *Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I, consideremos las siguientes afirmaciones:*

  (i) *$f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.*

  (ii) *f es inyectiva (equivalentemente, es estrictamente monótona).*

  Se verifica que $(i) \Rightarrow (ii)$, pero $(ii) \not\Rightarrow (i)$.

6.6. Teorema de la función inversa

El último resultado incluye dos ideas importantes, que vamos a tratar con más detalle. En primer lugar, nos da una condición suficiente para la inyectividad de una función derivable en un intervalo que enlaza perfectamente con la regla de derivación de la función inversa:

- ***Teorema de la función inversa (global):*** *Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I, con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f es inyectiva, $J = f(I)$ es un intervalo y f^{-1} es derivable en J con $\big(f^{-1}\big)'(y) = 1/f'\big(f^{-1}(y)\big)$ para todo $y \in J$.*

En efecto, el resultado anterior nos dice que f es inyectiva luego, por ser una función continua e inyectiva en un intervalo, sabemos que $J = f(I)$ es un intervalo y que f^{-1} es continua en J, con lo que basta aplicar la regla de derivación de la función inversa. ■

Frecuentemente, la hipótesis de que la función derivada no se anule en el intervalo I no se verifica, pero disponemos de una condición poco restrictiva que permite aplicar “localmente” el teorema anterior:

- ***Teorema de la función inversa (local):*** *Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I. Supongamos que la función derivada f' es continua en un punto $a \in I$, con $f'(a) \neq 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que, llamando g a la restricción de f al intervalo $I_\delta = I \cap]a - \delta, a + \delta[$, se tiene que g es inyectiva, $J_\delta = g(I_\delta)$ es un intervalo y g^{-1} es derivable en J_δ con $\left(g^{-1}\right)'(y) = 1/g'\left(g^{-1}(y)\right) = 1/f'\left(g^{-1}(y)\right)$ para todo $y \in J_\delta$.*

En efecto, aplicando a la función f' la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de la continuidad en el punto a, con $\varepsilon = |f'(a)| > 0$, obtenemos $\delta > 0$ tal que,

$$x \in I, \quad |x - a| < \delta \implies |f'(x) - f'(a)| < |f'(a)| \implies f'(x) \neq 0$$

Tomando entonces $I_\delta = I \cap]a - \delta, a + \delta[$ y llamando g a la restricción de f al intervalo I_δ, tenemos que g es derivable en I_δ con $g'(x) = f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I_\delta$. Basta entonces aplicar a la función g el teorema de la función inversa global. ∎

6.7. Valor intermedio para las derivadas

Como segunda aplicación importante del resultado sobre monotonía estricta, también para una función derivable en un intervalo, vemos que si la derivada toma un valor positivo y un valor negativo, entonces también tomará el valor 0. Esta observación se generaliza fácilmente para obtener que la función derivada tiene la propiedad del valor intermedio:

- ***Teorema del valor intermedio para las derivadas:*** *Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I. Entonces el conjunto $f'(I) = \{f'(x) : x \in I\}$ es un intervalo.*

Nótese que f puede ser constante, en cuyo caso el intervalo $f'(I)$ se reduce a un punto. En general, razonando por reducción al absurdo, supongamos que existen $u, v \in f'(I)$, con $u < v$, y $\lambda \in]u, v[$ tal que $\lambda \notin f'(I)$. Considerando la función $g : I \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - \lambda x$ para todo $x \in I$, tenemos que g es derivable en I con $g'(x) = f'(x) - \lambda$ para todo $x \in I$. Puesto que $\lambda \notin f'(I)$, tenemos $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Ocurrirá por tanto que, o bien $g'(x) > 0$ para todo $x \in I$, o bien $g'(x) < 0$ para todo $x \in I$. En el primer caso tenemos $f'(x) > \lambda$ para todo $x \in I$, en contradicción con $u \in f'(I)$, y en el segundo será $f'(x) < \lambda$ para todo $x \in I$, en contradicción con $v \in f'(I)$. ∎

Hemos obtenido una condición necesaria para que una función definida en un intervalo pueda ser la derivada de otra: ha de tener la propiedad del valor intermedio. Por ejemplo, *no existe una función derivable en $\mathbb{R}$ cuya derivada coincida con la función parte entera.*

Comparemos las dos familias de funciones definidas en intervalos que tienen la propiedad del valor intermedio: las funciones continuas y las derivadas de funciones derivables. Veremos más adelante que toda función continua en un intervalo es la derivada de una función derivable en dicho intervalo. Por tanto, el recién obtenido teorema del valor intermedio para las derivadas generaliza al teorema del valor intermedio para funciones continuas estudiado en su momento. De hecho lo generaliza estrictamente, pues más adelante encontraremos también ejemplos de funciones derivables en un intervalo cuya función derivada no es continua en dicho intervalo, luego una función definida en un intervalo puede ser la derivada de otra, sin ser continua.

6.8. Ejercicios

1. Dar un ejemplo de una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ no constante, que tenga un máximo relativo en todo punto de $\mathbb{R}$.

2. Determinar la imagen de la función $f:A\to\mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $A=[0,2]$, $\quad f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x+1 \quad \forall x\in A$

   (b) $A=[1,2e]$, $\quad f(x)=\dfrac{\log x}{x} \quad \forall x\in A$

   (c) $A=[-2,2]$, $\quad f(x)=1-\sqrt{2|x|-x^2} \quad \forall x\in A$

3. Sea $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}^+$ y supongamos que tanto f como f' tienen límite en $+\infty$. Probar que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

4. Sean $a,b,c\in\mathbb{R}$ con $a^2<3b$. Probar que la ecuación $x^3+ax^2+bx+c=0$ tiene una única solución real.

5. Determinar el número de soluciones reales de la ecuación $3x^5+5x^3-30x=\alpha$, según el valor de $\alpha\in\mathbb{R}$.

6. Probar que $1+x\leqslant e^x\leqslant 1+xe^x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

7. Probar que $x^e\leqslant e^x$ para todo $x\in\mathbb{R}^+$. Probar también que la anterior desigualdad caracteriza al número e: $a\in\mathbb{R}^+,\ x^a\leqslant a^x\ \forall x\in\mathbb{R}^+ \implies a=e$.

8. Sean $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$ y $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$ verificando que $f(a)=f(b)=0$. Probar que, para todo $\lambda\in\mathbb{R}$, existe $c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=\lambda f(c)$.

9. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función derivable en $[0,1]$ con $f(0)=0$. Supongamos que la función f' es creciente. Probar que la función $g:]0,1]\to\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ para todo $x\in]0,1]$, también es creciente.

10. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función derivable en $[0,1]$ tal que $f(0)=0$ y $|f'(x)|\leqslant|f(x)|$ para todo $x\in[0,1]$. Probar que $f(x)=0$ para todo $x\in[0,1]$.